Math. Pb
203

Math. P. 203.b Hartmañ, M.,

Geometrie

Von

Wien.

Grundlehren

der

Geometrie.

Von

Math. Hartmann, Edlen von Franzenshuld,

Doktor der Philosophie, Besitzer der goldenen Gelehrten - Medaille, Professor der Mathematik an der k. k. Ober-Realschule zu Wien.

Bayerische Staatsbibliothek München

Dritte unveränderte Auflage.

Wien.

Tendler & Comp.

1855.

203 = B.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Hochwohlgebornen

Herrn

Andreas von Ettingshausen,

Doktor der Philosophie und Medizin, Ritter des königl. Dänischen Dannebrog-Ordens, k. k. Regierungsrathe, Professor der höheren Physik, emeritirtem Professor der höheren Mathematik an der k. k. Universität zu Wien, Mitgliede der philosophischen Fakultät, erstem Sekretär der Wiener k. k. Akademie der Wissenschaften, Mitgliede der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaft, der k. k. Gesellschaft der Aerzte und des niederösterreichischen Gewerbvereins zu Wien, der Gesellschaft des vaterländischen Museums, des Vereins zur Ermunterung des Gewerbsgeistes in Böhmen, koresp. Mitgliede des k. k. Institutes der Wissenschaften und Künste zu Venedig, der k. Akademie der Wissenschaften in München, der großh. Badischen Gesellschaft der Naturforscher und Aerzte zu Heidelberg, der naturforschenden Gesellschaft zu Halle, der Rheinischen naturforschenden Gesellschaft zu Mainz, Ehrenmitgliede der Leipziger polytechnischen Gesellschaft und des physikalischen Vereins zu Frankfurt;

dem

eifrigen Beförderer der Wissenschaften

aus

wahrer Hochachtung gewidmet

vom

Verfasser.

Vorrede zur ersten Auflage.

Ein geometrisches Lehrbuch, welches dem Bedürfnisse der philosophischen Jugend ganz entsprechen soll, muß mehrere, nicht leicht zu realisirende Eigenschaften besitzen.

Wegen der Natur und Würde der Wissenschaft und der durch sie erzielenden formellen Geistesbildung muß es die geometrischen Lehren streng systematisch mit Deutlichkeit entwickeln, und hierbei die in ihr Bereich gehörenden Theoreme so gruppiren, daß sie höhern, aus logischen Eintheilungen sich ergebenden Gesichtspunkten untergeordnet erscheinen; wodurch nicht nur eine tiefere Einsicht in den Inhalt und Umfang des Dargestellten, sondern auch eine klare Uebersicht über das ganze System gewonnen wird. Bei Begründung einzelner Lehrsätze müssen die kürzern Beweise vor den längern, unter übrigens gleichen Umständen, den Vorzug erhalten; nicht nur deßhalb, weil durch erstere mit wenigern Mitteln derselbe Zweck erreicht wird, sondern auch, weil kürzere Beweise eine größere Evidenz gewähren. Die in der Geometrie sonst so gebräuchlichen indirekten Beweise hingegen sind zu vermeiden, wo direkte Begründung auf einfache Weise zum Ziele führt.

Das Lehrbuch muß ferner so vollständig sein, daß es mit den nöthigen arithmetischen Kenntnissen verbunden, als Vorbereitung zum gründlichen Studium der Physik, der höhern Mathematik und praktischen Geometrie an Universitäten und technischen Lehranstalten vollkommen ausreiche; überhaupt alle Lehren enthalte, welche für die Wissenschaft an sich oder deren Anwendung wichtig sind; dabei aber nicht nur in der kurzen Zeit eines Semesters mit gehöriger Deutlichkeit und Umständlichkeit sich vortragen lasse, sondern auch zur genauen Durchprüfung jeder Theorie die nöthige Zeit gestatte; ein

Umstand, der nur zu häufig, aber immer zum größten Nachtheile für den Unterricht vernachlässiget wird, und bei sehr voluminösen unzweckmäßigen Lehrbüchern auch vernachlässiget werden muß.

Dieß sind nach der Ansicht des Verfassers die Eigenschaften eines jenem Zwecke entsprechenden geometrischen Lehrbuches, welche er bei Bearbeitung des vorliegenden stets vor Augen hatte, und nach Kräften zu realisiren suchte.

Der Verfasser hatte in seinem Streben nach einfacher und direkter Begründung der geometrischen Lehren häufig das Vergnügen, neue Gedankenverbindungen zu finden, wie der sachkundige Leser z. B. aus §. 8. 3., §. 10. 1., §. 15. 1., §. 31. 1., §. 34, §. 47., §. 51., §. 58. 4., und an vielen andern Orten ersehen wird; jene Lehren aber, in welchen der für das kommensurable Verhältniß erwiesene Satz auf das inkommensurable ausgedehnt wird, können nur indirekt erwiesen werden; doch haben alle dießfälligen Beweise ihrem Wesen nach einen gemeinsamen Charakter, weßhalb sie sich durch eine einzige Beweisführung abthun lassen. Den Begriff der Aehnlichkeit glaubte der Verfasser anders, als es sonst zu geschehen pflegt, aufstellen zu müssen; daher haben sich auch die Beweise über Dreiecks-Aehnlichkeit §. 34 diesem gemäß gestaltet.

Der hier betrachtete Gegenstand wurde mit gehöriger Vollständigkeit abgehandelt, wie aus dem angefügten ausführlichen Inhaltsverzeichnisse mit Klarheit hervorgeht; so zwar, daß der Vorwurf einer dießfälligen Mangelhaftigkeit den Verfasser auf keine Weise treffen kann.

Da der Verfasser verpflichtet ist, und auch den lebhaften Wunsch hegt, in dem ihm anvertrauten kleinen Wirkungskreise nach Kräften gründliche mathematische Kenntnisse zu verbreiten; so glaubte er die Ausarbeitung vorliegender Schrift seiner Stellung und der Wissenschaft schuldig zu sein.

Görz im April 1847.

Der Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Das günstige Ergebniß des nach dem vorliegenden Lehrbuche eingerichteten geometrischen Unterrichts, welches selbst bei minder talentirten und der deutschen Sprache nicht ganz kundigen Schülern erzielt wurde, die öffentlichen Anerkennungen, welche demselben zu Theil wurden, endlich der von mehreren Lehranstalten ausgesprochene Wunsch, daß nach diesem Lehrbuche die Geometrie gelehrt werden möge: sind Thatsachen, welche die Ansicht des Verfassers hervorgerufen haben, daß vorliegende Schrift ihren Zweck, die geometrischen Grundlehren in ein sehr faßliches und strengwissenschaftliches System zu bringen, nicht ganz verfehlt haben dürfte.

In der nun erforderlichen zweiten Auflage nahm daher der Verfasser keine Veränderung vor, sondern ließ nur, zur Bequemlichkeit der Lernenden, die nöthigen Figuren in den Text einschalten.

Da in der Zwischenzeit ein im zweiten Jahresberichte des Görzer Obergymnasiums veröffentlichtes allgemeines Gesetz der Dreiecksseiten vom Verfasser gefunden wurde, so glaubte er die dießfällige Abhandlung den hier betrachteten Grundlehren anfügen zu dürfen.

Wien im März 1852.

Der Verfasser.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die ausgezeichneten Erfolge des Unterrichts in der Geometrie, welche durch die Benützung des vorliegenden Lehrbuches gewöhnlich erzielt wurden, so wie die schmeichelhafte Würdigung welche dieses Werk in mehreren geachteten öffentlichen Blättern fand, bestimmten den Verfasser die dritte Auflage desselben unverändert erscheinen zu lassen; mit dem Wunsche, dadurch auch ferner zur Verbreitung gründlicher mathematischer Kenntnisse einen kleinen Beitrag zu liefern.

Bei dieser Gelegenheit glaubt der Verfasser noch bemerken zu dürfen, daß sein hier bearbeitetes System der Geometrie auch solchen Kandidaten, die sich dem mathematischen Lehramte an Ober-Realschulen oder Gymnasien zu widmen gedenken, also vorzugsweise nach logischer Ordnung im Lehrstoffe und nach tieferem Wissen streben, zum Selbst-Studium besonders zu empfehlen wäre.

Wien am 17. Oktober 1855.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Einleitung.

II. Grundeigenschaften der Dreiecke

III. Von den parallelen Linien und ihrer nächsten Anwendung.

*

Seite

IV. Berechnung des Flächeninhalts der Figuren.

V. Proportionallinien und Aehnlichkeit der Figuren.

VI. Lehre vom Kreise.

Seite

VII. Von den Kreisfunktionen.

VIII. Anwendung der Kreisfunktionen auf Dreiecke (Trigonometrie).

IX. Von der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

I. Einleitung.

§. 1. **Von den physischen und mathematischen Körpern.** Jede Größe, welche Raum einnimmt und denselben erfüllt, heißt Materie oder Stoff, und begrenzter Stoff wird physischer Körper genannt; z. B. ein hölzerner Würfel, eine eiserne Kugel. Physische Körper sind überhaupt die Gegenstände, welche in der Erfahrung sich unserer Betrachtung darbieten, nämlich durch Affektion unserer Sinne, vorzüglich des Tastsinnes, als ein Reales sich ankündigen, und deren Gesammtheit die Natur, in materieller Bedeutung des Wortes, ausmacht. Was Raum einnimmt muß eine Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe haben, diese Ausdehnungen kommen also dem physischen Körper zu; man nennt sie Dimensionen desselben. Die Art der Begrenzung des Stoffes begründet die Form des physischen Körpers; in diesem sind daher Stoff und Form zu einem Ganzen so innig verbunden, daß ihre Trennung nur in der Vorstellung möglich ist. Denkt man sich aus dem Raume eines physischen Körpers allen Stoff hinweg, so bleibt ein begrenzter leerer Raum, und dieser wird mathematischer oder geometrischer Körper genannt. Abstrahirt man z. B. bei einem hölzernen Würfel von seinem Stoffe, so ergibt sich ein auf bestimmte Weise begrenzter leerer Raum, der also ein mathematischer Körper ist, und mathematischer Würfel genannt werden kann.

§. 2. **Mathematische Flächen, Linien und Punkte.** Die Ausdehnung eines mathematischen Körpers an seiner Grenze, also nur nach zwei Dimensionen, Länge und Breite, ist die mathematische Fläche; die Ausdehnung der mathematischen Fläche an ihrer Grenze, somit nur nach einer Dimension, Länge, heißt mathematische Linie; endlich die Grenze aller Ausdehnung überhaupt und jener der mathematischen Linie insbesondere ist der mathematische Punkt.

Wenn zwei mathematische Linien sich schneiden, so wird an der Durchschnittsstelle die Ausdehnung der einen durch jene der andern aufgehoben; da nun der mathematischen Linie nur eine einzige Ausdehnung zukommt, so muß also jene Stelle gar keine Ausdehnung haben, somit ein mathematischer Punkt sein. Daher ist es auch nicht unpassend, einzelne Stellen einer mathematischen Linie Punkte zu nennen. Wenn zwei mathematische Flächen sich schneiden, so wird in beiden am Durchschnitte eine Dimension aufgehoben, folglich kommt demselben nur eine einzige Ausdehnung zu; daher jener Schnitt eine mathematische Linie sein muß. Auf dieselbe Art zeigt sich, daß der Durchschnitt einer Linie mit einer Fläche ein Punkt sein müsse.

§ 3. **Objekt und Eintheilung der Geometrie.** Wegen der Stetigkeit des Raumes sind die mathematischen Körper, Flächen und Linien stetige Größen; sie bilden daher den Gegenstand der Betrachtung jenes Haupttheiles der Mathematik, welcher sich mit den stetigen Größen beschäftiget und Geometrie genannt wird *). Die Geometrie muß aber auch bisweilen Punkte in Betrachtung ziehen, in wie fern nämlich ihre Lage auf die Untersuchung stetiger Größen einen Einfluß ausübt.

Da das Wesen der Mathematik darin besteht, daß sie nur die äußere Natur oder die Form der Dinge, welche durch die Anschauung gegeben ist, untersucht, ihre innere Natur aber, oder ihre Wirksamkeit nicht berücksichtiget; so bezieht sich die geometrische Betrachtung eines physischen Körpers nur auf dessen Größe und Gestalt, und auf die durch ihn gleichzeitig gegebenen Flächen, Linien und Punkte.

Die Geometrie, in so fern sie bloß die Anfangsgründe abhandelt, also nur die einfachsten Linien, Flächen und Körper betrachtet, daher als ein Theil der Elementar-Mathematik erscheint, heißt niedere oder Elementar-Geometrie. Untersucht sie aber die Elementar-Mathematik voraussetzend, wohl auch mit Hilfe höherer Rechnungen, alle Arten geometrischer Linien, Flächen und Körper, so wird sie ein Theil der höheren Mathematik und daher höhere Geometrie genannt.

§. 4. **Gleichheit, Aehnlichkeit und Kongruenz stetiger Größen.**

1) Zwei stetige Größen, die miteinander verglichen, also auf eine dritte als Einheit angenommene bezogen werden sollen, müssen mit eben jener dritten, folglich auch unter sich gleichartig sein; haben sie nun dasselbe Verhältniß zu jener Einheit, d. h., ist sie in der einen stetigen Größe so oft enthalten, wie in der andern, so sind sie gleich. Diese Eigenschaft haben z. B. geometrische Körper, die denselben Würfel 20mal enthalten.

2) Zwei geometrische Linien, Flächen oder Körper, die genau dieselbe Beschaffenheit haben, und sich daher nur durch ihre Größe unterscheiden, heißen ähnlich. Z. B. zwei Würfel oder zwei Kugeln. Die Aehnlichkeit zweier Größen wird durch das zwischen sie gesetzte Zeichen $\sim$ ausgedrückt.

3) Wenn aber zwei stetige Größen gleich und ähnlich sind, wie z. B. zwei gleiche Würfel, so heißen sie kongruent, daher ist auch das dießfällige Zeichen $\cong$ aus jenem der Gleichheit und Aehnlichkeit zusammengesetzt. Zwei solche Größen können sich also nur durch die Verschiedenheit ihres Ortes, oder auch noch überdieß durch jene ihrer Lage unterscheiden, und stellt man sich vor, daß die eine auf oder, nach Umständen, in die andere, gehörig gelegt sei, so müssen sie mit ihren Grenzen genau zusammenfallen, also sich wechselseitig decken.

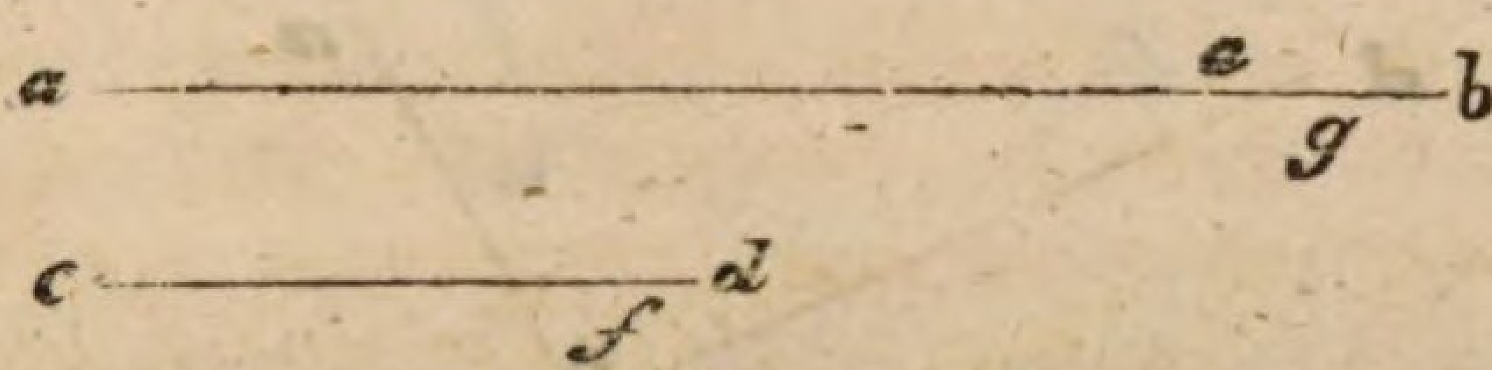
§. 5. **Von der geraden Linie und ebenen Fläche.** Denkt man sich den geometrischen Puntt in Bewegung versetzt, so ist die da-

---

*) Des Verfassers Grundlehren der allgemeinen Arithmetik. (Wien, 1843. Bei Joh. Bapt. Wallishausser.) §. 7 und 8.

durch beschriebene Bahn, wegen der Stetigkeit des Raumes, eine stetige Größe, und zwar nur von einer Dimension, somit eine geometrische Linie. Ist nun diese Bewegung so beschaffen, daß sie die ursprünglich angenommene Richtung stets, also ohne die geringste Abweichung, beibehält, so heißt die auf diese Weise entstandene Linie gerade und wird meistens durch zwei zu ihren Endpunkten gesetzte Buchstaben bezeichnet, wie (Fig. 1.) a b.

Fig. 1.



Um zur Kenntniß der Gleichheit oder Ungleichheit zweier gerader Linien a b und c d zu gelangen, ist es erforderlich, eine dritte Gerade α als Einheit anzunehmen und zu bestimmen, wie oft sie in beiden enthalten sei; zeigt sich nun, daß eine Gerade die Einheit eben so oft enthält als die andere, so sind sie gleich; sonst aber sind sie ungleich, und zwar ist jene die größere, welche jene Einheit mehrmal enthält. Auch läßt sich leicht das Verhältniß jener beiden Geraden bestimmen, denn ist $ab = m.\alpha$ und $cd = p.\alpha$, so hat man $ab : cd = m : p$. Wenn aber jene Einheit in beiden gegebenen Geraden nicht vollkommen genau enthalten wäre, so müßte man ihr gemeinschaftliches Maß auf folgende Art aufsuchen. Man trage die kleinere Gerade c d auf die größere a b so oft als möglich auf, und zwar sei $ab = 3.cd + be$, wo $be < cd$ ist; ferner untersuche man wie oft b e in c d enthalten sei, und wir wollen annehmen $cd = 2.be + fd$, wo $fd < be$ ist, hierauf sei $be = fd + bg$, wo $bg < fd$ ist, und endlich $df = 2.bg$; so findet man $be = 2.bg + bg = 3.bg$, $cd = 2.3\,bg + 2\,bg = 8\,bg$ $ab = 3.8\,bg + 3bg = 27.bg$, daher $ab : cd = 27 : 8$.

Auf ähnliche Art verfährt man auch in andern Fällen. Zeigt sich nun, daß die gegebenen Geraden ein gemeinschaftliches Maß haben, wie hier b g, so ist das gesuchte Verhältniß kommensurabel, sonst aber inkommensurabel.

Zur Längenbestimmung gerader Linien, d. h. zur Ausmessung derselben, dient nach Umständen die Klafter, der Schuh oder Zoll, wobei zu bemerken ist, daß die Klafter in 6 Schuh, der Schuh in 12 Zoll und der Zoll in 12 Linien getheilt werde.

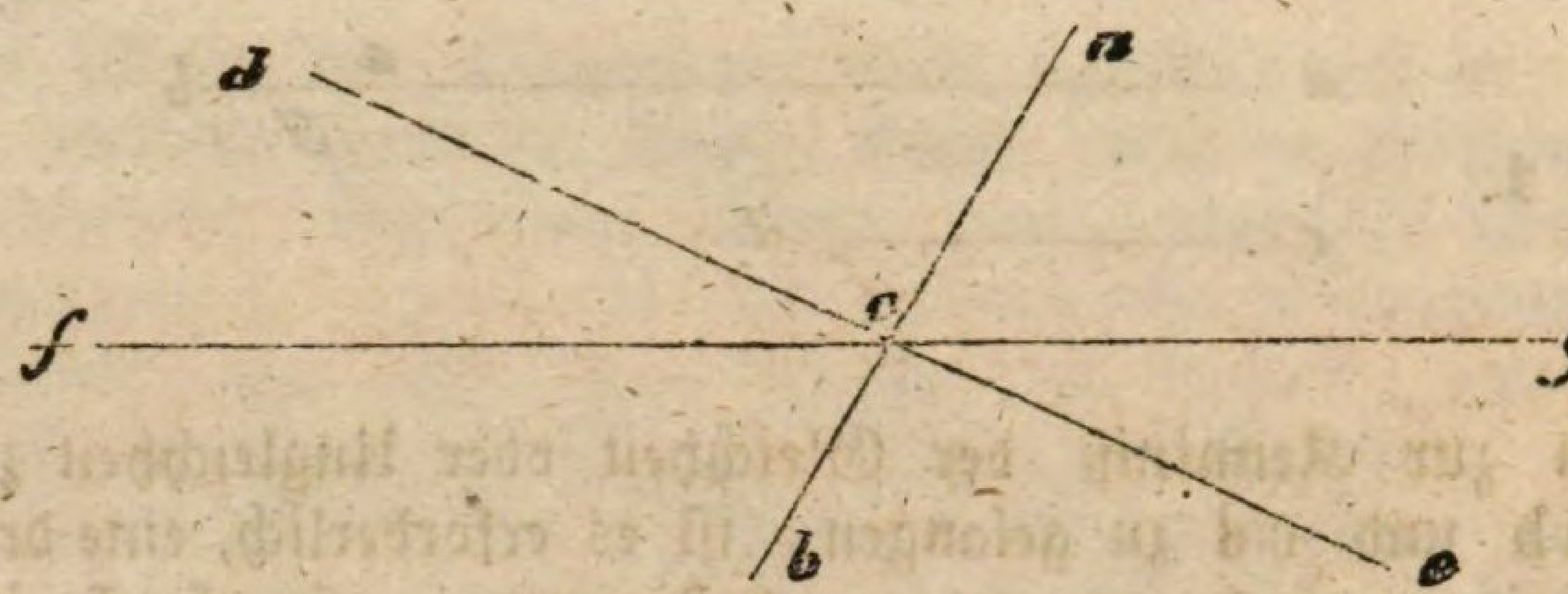
Gerade Linien haben offenbar immer dieselbe Beschaffenheit, und unterscheiden sich daher bloß durch ihre Länge von einander, folglich sind sie ähnliche Größen. Sind also zwei gerade Linien gleich, so sind sie auch kongruent, und lassen sich daher so aufeinanderlegen, daß sie ihrer ganzen Länge nach, also auch mit ihren Endpunkten zusammenfallen.

Zwei gerade Linien, die mit ihren Endpunkten zusammenfallen, müssen es auch ihrer ganzen Länge nach; denn denkt man sich von a nach b zwei gerade Linien gezogen, so haben beide dieselbe ursprüngliche Richtung, und da sie diese nicht ändern, so müssen sie also ihrer ganzen Länge nach zusammenfallen. Von einem Punkte zu einem andern ist

also nur eine gerade Linie möglich, und daher ist durch zwei Punkte die Lage der durch sie gezogenen Geraden bestimmt.

Läßt sich die innerhalb einer Fläche gezogene Gerade (Fig. 2.) a b so um einen beiläufig in der Mitte liegenden Punkt c drehen, daß sie in allen dadurch versetzten Lagen g f, e d ihrer ganzen Länge nach in der Fläche liegt; so heißt sie in dem Bereiche der stattgehabten Untersuchung eine ebene Fläche oder eine Ebene.

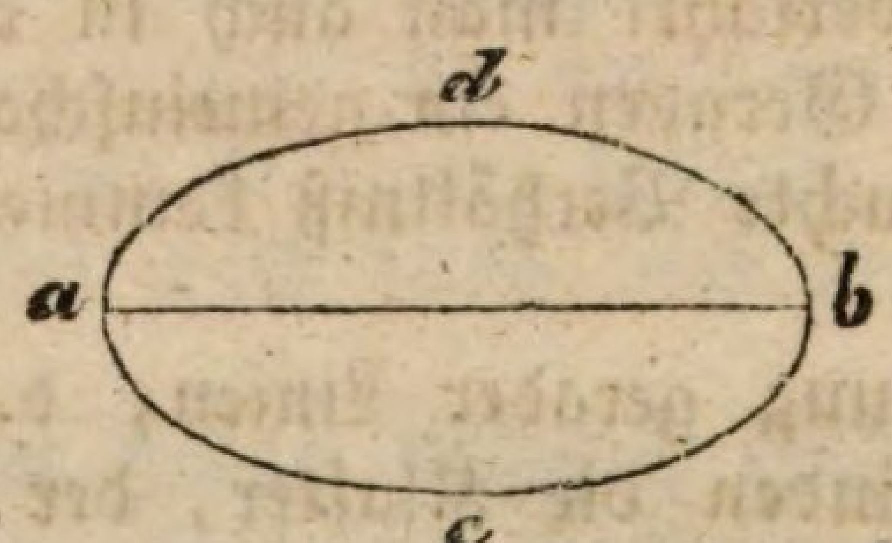
Fig. 2.



Wenn zwei Punkte einer Ebene durch eine Gerade verbunden werden, so muß demnach diese Verbindungslinie ganz in der Ebene liegen. Ueberhaupt wollen wir annehmen, daß alle in der Folge zu betrachtenden Linien stets in der Ebene gezogen seien, und auch einzelne Punkte als in der Ebene liegend uns vorstellen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil vorausgesetzt wird.

§. 6. **Von den krummen Linien überhaupt und dem Kreise insbesondere.** Aendert sich die Richtung der Bewegung eines Punktes in der Ebene ohne Unterbrechung, so heißt die dadurch entstandene Linie (Fig. 3.) a d b eine krumme; führt nun diese Bewegung bis zum Anfangspunkte, wo sie daher alle in einer Ebene möglichen Richtungen nach und nach angenommen hat, so heißt die erzeugte krumme Linie eine geschlossene, wie a d b c a.

Fig. 3.

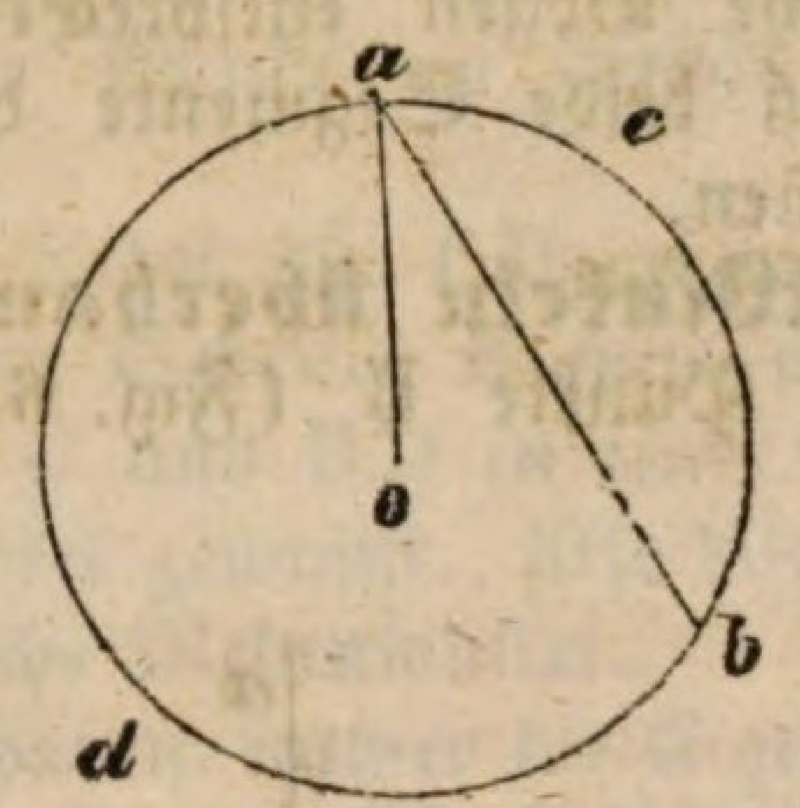


Von zwei, zwei Punkte a und b verbindenden Linien, deren eine a b gerade, die andere a d b aber krumm ist, ist immer die letztere länger; denn, da die krumme Linie ihre Richtung stets ändert, während die gerade die ursprünglich angenommene immer beibehält, so führt erstere durch Umwege von a nach b, ist also länger; und da dieß auch von jeder andern von a nach b gezogenen krummen Linie gilt, so ist unter allen von a nach b möglichen Linien die gerade die kürzeste.

Unter den geschlossenen krummen Linien gibt es nur eine einzige, welche in allen ihren Theilen durchaus gleichmäßig gekrümmt ist, und

diese heißt Kreis (Fig. 4.), einzelne Theile dieser Linie aber werden Kreisbögen genannt. Der Kreis charakterisirt sich dadurch, daß alle

Fig. 4.



Punkte desselben von einem innerhalb gelegenen o gleich weit abstehen. Dieser Abstand a o heißt Halbmesser (Radius) und jener Punkt o Mittelpunkt (Centrum). Mit dem Zirkel, einem allgemein bekannten Werkzeuge, ist es leicht einen Kreis zu zeichnen; indem man den Zirkelspitzen einen Abstand, der gleich dem Radius ist, ertheilt, und während die eine Zirkelspitze im Mittelpunkte eingesetzt bleibt, mit der andern die Kreislinie beschreibt. Durch die Lage des Mittelpunktes ist der Kreis der Lage nach durch die Länge des Halbmessers der Größe nach, also durch beides vollkommen bestimmt. Je kleiner der Halbmesser eines Kreises ist, desto kürzer ist der Weg, auf welchem jene die Kreislinie beschreibende Zirkelspitze zu ihrem ursprünglichen Punkt zurückkehrt, desto stärker muß daher die Krümmung sein. Nur jene Bögen, die mit gleichen Radien beschrieben wurden, haben also die nämliche Krümmung, und solche wollen wir gleichartige nennen. Vermöge dieser Eigenschaft lassen sich gleichartige Bögen wie gerade Linien aufeinander legen, und ihre Gleichheit oder Ungleichheit läßt sich demnach, wenn man einen dritten gleichartigen Bogen als Einheit annimmt, ganz so wie bei geraden Linien ausmitteln. Da ferner gleichartige Bögen stets dieselbe Beschaffenheit besitzen, und sich bloß durch ihre Größe unterscheiden, so sind sie ähnlich, und daher müssen gleiche Bögen dieser Art auch kongruent sein; folglich so aufeinandergelegt werden können, daß sie sich wechselseitig decken.

Eine Gerade a b, welche zwei Punkte a und b der Kreislinie verbindet, heißt Sehne; a c b und a d b sind die derselben entsprechenden Bögen, und die mittelst der Sehne erhaltenen Theile der Kreisebene werden Abschnitte (Segmente) genannt. Nun läßt sich leicht erweisen, daß gleichen Bögen (Fig. 5.) A B und a b auch gleich Sehnen A B

Fig. 5.

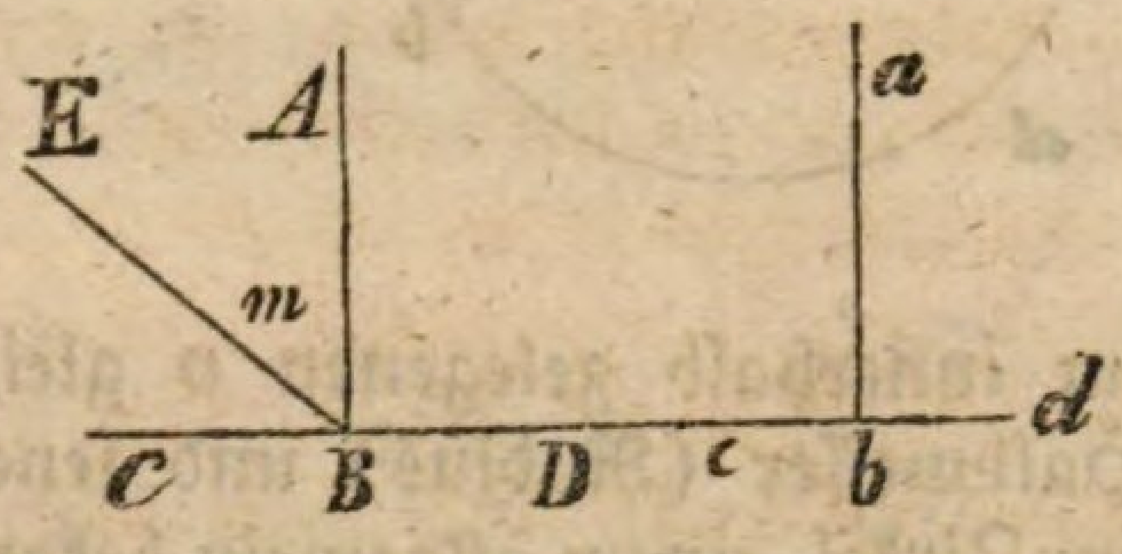


und a b entsprechen. Denn, da obige Bögen unter jener Voraussetzung auch kongruent sind, so lassen sie sich so aufeinanderlegen, daß sie sich gegenseitig decken, folglich a auf A und b auf B fällt; daher fallen

auch die Sehnen ab und AB zusammen, und sind also gleich. Auch läßt sich dieser Satz leicht umkehren und zeigen, daß gleichen Sehnen gleichartiger Bögen gleiche Bögen entsprechen müssen; wobei jedoch bemerkt werden muß, daß beide Segmente das Centrum entweder enthalten oder nicht einschließen.

§. 7. **Von den Winkeln überhaupt.** Die gegenseitige Neigung zweier von einem Punkte B (Fig. 6.) gezogener Geraden BA

Fig. 6.



und BE heißt Winkel, B sein Scheitel, BA und BE aber werden Schenkel desselben genannt. Der Winkel wird durch W. ABE oder W. EBA nämlich so ausgedrückt, daß der Buchstabe am Scheitel stets in der Mitte ist, oder auch bloß durch W. m. Das Verhältniß zweier gegebener Winkel wird ausgemittelt, wenn man untersucht, wie oft ein dritter als Einheit angenommener in beiden enthalten ist. Sind die beiden untersuchten Winkel dasselbe Vielfache jener Einheit, so sind sie gleich, sonst aber ungleich. Durch Verlängerung der Schenkel eines Winkels wird ihre Lage gegeneinander nicht verändert, daher die Größe eines Winkels von der Länge seiner Schenkel unabhängig ist. Die Winkel unterscheiden sich blos durch ihre Größe voneinander, sind daher stets ähnlich, folglich muß aus ihrer Gleichheit auch ihre Kongruenz hervorgehen. Gleiche Winkel kann man also immer so aufeinanderlegen, daß sie mit ihren Scheiteln und Schenkeln zusammenfallen.

Auf die früher genannte Weise gelangt man zwar zur Kenntniß der Gleichheit zweier Winkel; allein wenn diese aufeinandergelegt werden können, ist es viel einfacher, aus der Kongruenz derselben auf ihre Gleichheit zu schließen. Auch die Gleichheit gerader Linien und gleichartiger Bögen kann auf diese Art ausgemittelt werden.

§. 8. **Hauptarten der Winkel und ihre Eigenschaften.**

1) Ist AB (Fig. 6.) so auf CD gezogen, daß W. ABC = ABD ist, so heißt AB senkrecht auf CD, welche Lage durch AB ⊥ CD ausgedrückt wird; dann muß aber jede andere von B gezogene Gerade BE mit CD ungleiche Winkel CBE und DBE bilden, folglich von der senkrechten Lage abweichen, also schief stehen. Daher ist auf eine Gerade CD von einem Punkte B aus nur eine einzige Senkrechte möglich.

Die Winkel, welche eine Gerade CD mit der auf ihr Senkrechten AB bildet, heißt man rechte, und nun läßt sich leicht erweisen, daß solche Winkel immer gleich sein müssen. Denn ist nicht nur AB ⊥ CD, sondern auch ab ⊥ cd und die Gleichheit der rechten Winkel ABD und abd zu zeigen; so denke man sich cd auf CD in der Art gelegt, daß b auf B fällt, so muß, da auf dieselbe Gerade CD von demselben Punkte B

nur eine Senkrechte A B möglich ist, auch a b auf A B fallen; daher sind die Winkel A B D und a b d kongruent, folglich auch gleich.

Ein Winkel wie C B E, der kleiner als ein Rechter ist, heißt spitzig; jener aber, der den rechten Winkel an Größe übertrifft, wie W. E B D, wird stumpf genannt.

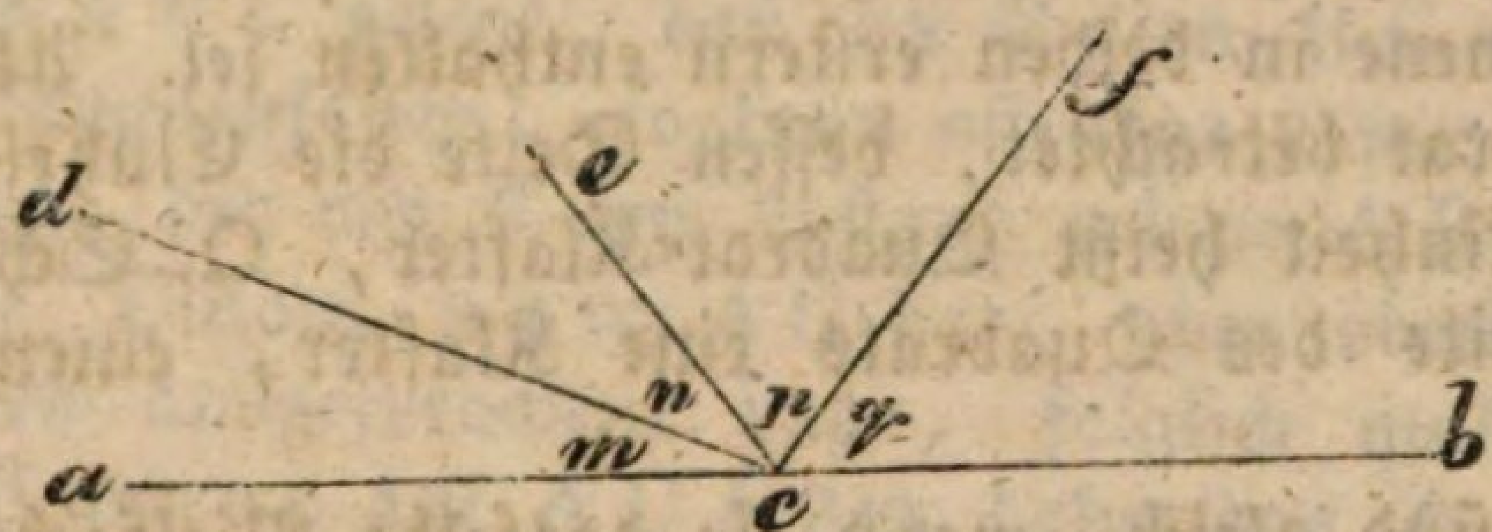
2) Die Gerade B E bildet mit C D zwei Winkel E B C und E B D, die einen gemeinschaftlichen Scheitel B und Schenkel B E haben, und deren andere Schenkel B C und B D in einer Geraden C D liegen, solche Winkel werden Nebenwinkel genannt. Also bildet eine Gerade mit der auf ihr Senkrechten stets gleiche Nebenwinkel.

Zwei Nebenwinkel haben immer die Eigenschaft, daß ihre Summe zweien Rechten gleich ist, nämlich W. E B C + W. E B D = 2 R. Denkt man sich, um dieß zu erweisen, A B ⊥ C D gezogen, so ist W. A B C + A B D = 2 R; wird nun A B in die Lage B E versetzt, so wird W. A B C um m kleiner, aber um eben so viel W. A B D größer, also muß W. E B C + E B D = 2 R. sein. Auch folgt hieraus, daß wenn von zwei Nebenwinkeln einer E B C spitzig ist, der andere E B D stumpf sein müsse.

3) Wenn die Summe zweier Winkel E B C + E B D, die einen gemeinschaftlichen Scheitel B und Schenkel B E haben, = 2 R ist, so müssen die beiden andern Schenkel B C und B D in einer geraden Linie liegen. Um dieß zu beweisen, denke man sich A B ⊥ B D errichtet, also ist der W. A B D = R. Da nun vermöge der Voraussetzung W. E B C + E B D = 2 R ist, so hat man auch W. E B C + E B A + A B D = 2 R. Allein es ist W. E B C + E B A = A B C, also W. A B C + A B D = 2 R. Wird nun von dieser Gleichung W. A B D = R abgezogen, so folgt W. A B C = R, daher A B ⊥ B C. Es ist also auch B C ⊥ A B, und da ebenfalls B D ⊥ A B ist, und von einem Punkte B einer Geraden A B auf sie nur eine einzige Senkrechte gezogen werden kann, so müssen B C und B D in einer geraden Linie liegen.

4) Werden von einem Punkte c (Fig. 7.) einer Geraden a b ober-

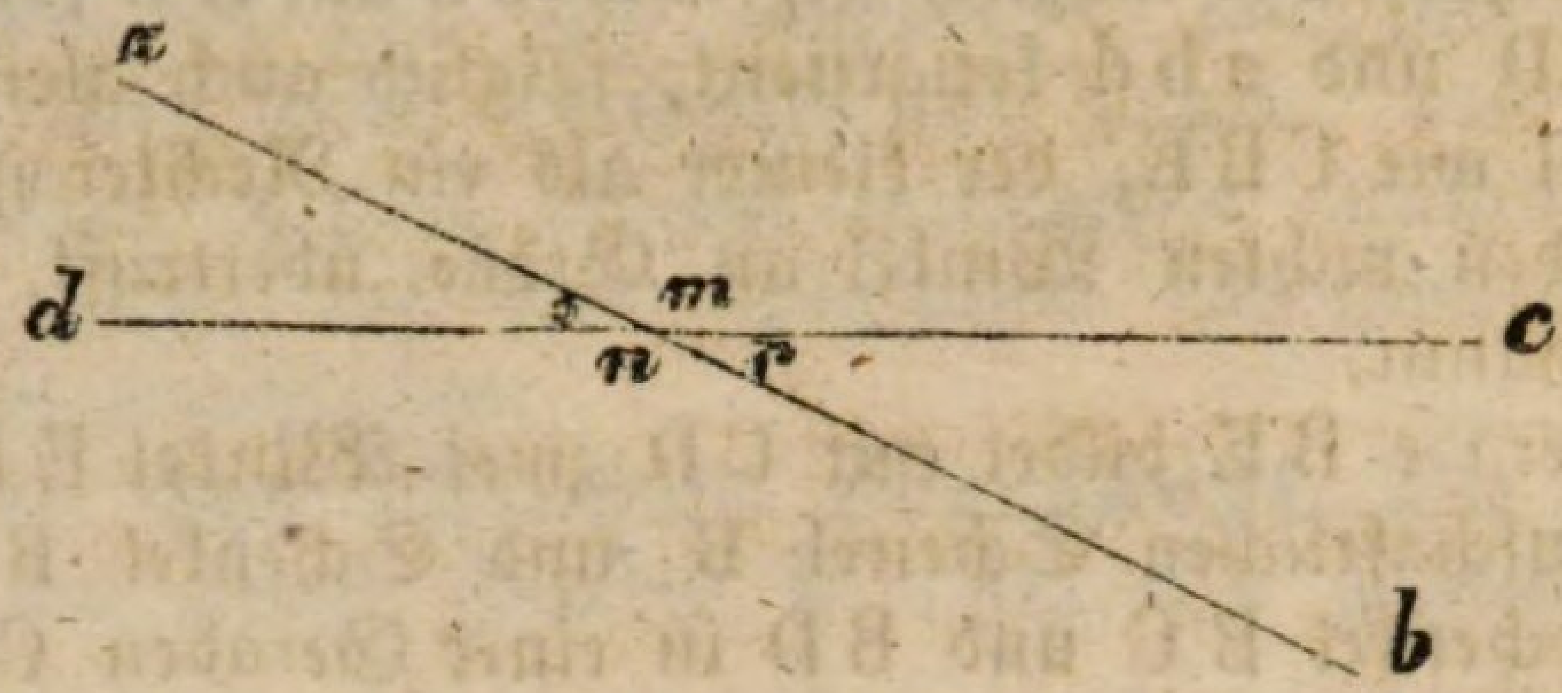
Fig. 7.



oder unterhalb derselben mehrere andere c d, c e, c f, in beliebigen Richtungen gezogen, so ist die Summe der dadurch entstehenden Winkel m + n + p + q = 2 R. Denn offenbar ist W. a c e + e c b = 2 R; setzt man nun m + n statt W. a c e und p + q für W. e c b, so ergibt sich der obige Satz. Hieraus folgt auch, daß, wenn von einem Punkte c (Fig. 2.) nach beliebigen Richtungen mehrere Gerade c a, c g, c e u. s. w. gezogen werden, die Summe der um c entstandenen Winkel 4 R sein müsse.

5) Zwei Winkel (Fig. 8.) m und n, die einen gemeinschaftlichen Scheitel o haben, und in welchen die Schenkel a o und o c des einen Verlängerungen jener b o und d o des andern sind, heißen Scheitel-

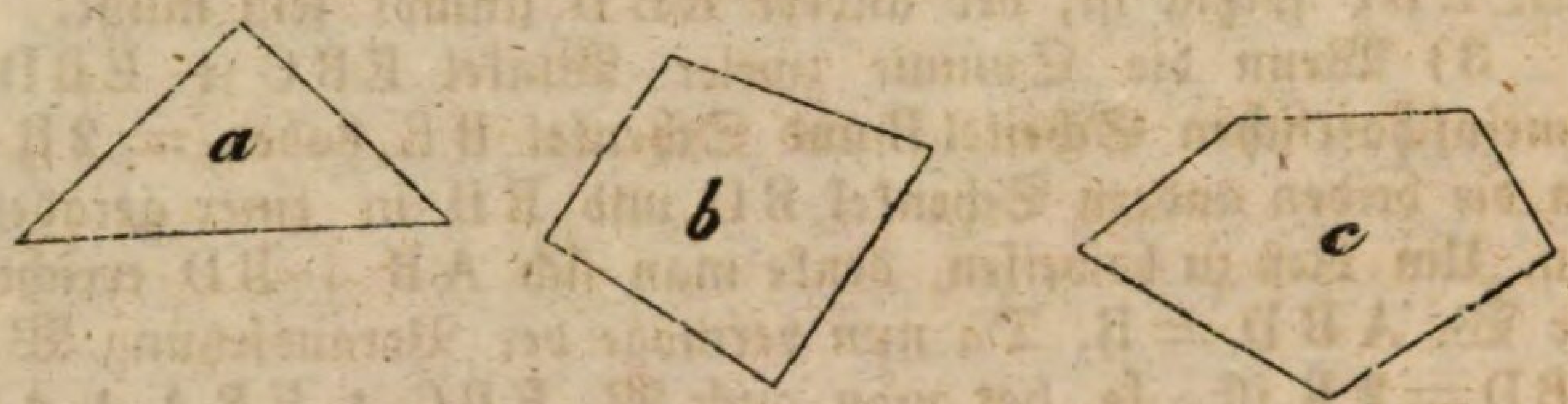
Fig. 8.



winkel; diese liegen am Durchschnittspunkte zweier geraden Linien einander gegenüber, und sind immer gleich. Vermöge (2) ist nämlich $m+p=n+p$, also auch $m=n$.

§. 9. **Von den Figuren.** Eine von geraden Linien begrenzte Ebene heißt ebene, geradlinige Figur, und die Grenzen derselben werden Seiten genannt. Die Summe der Seiten nennt man den Umfang. Eine Figur ist ein Dreieck (Fig. 9.) a, Viereck b, überhaupt

Fig. 9.

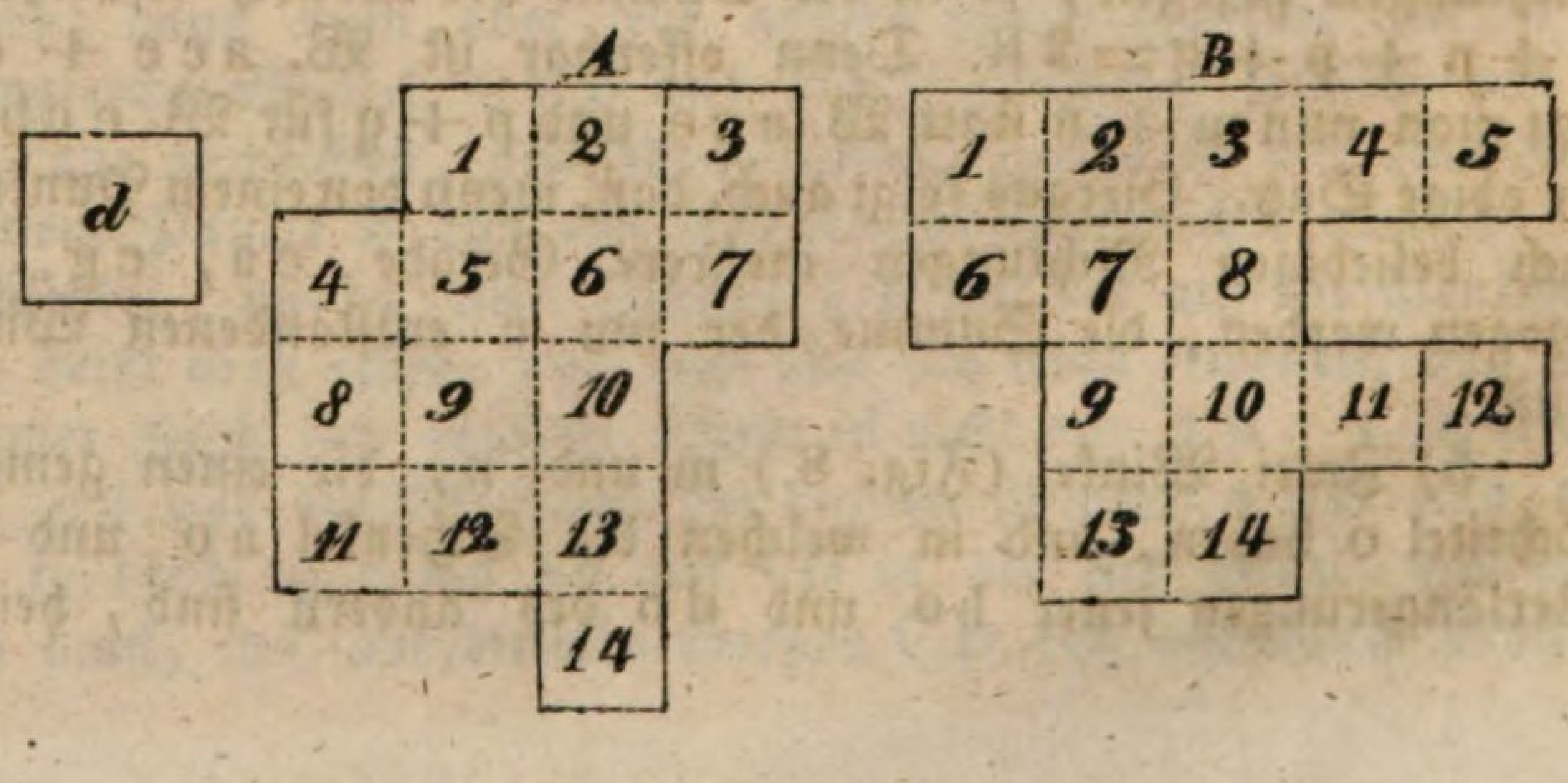


Vieleck (Polygon) c, wenn sie 3, 4 oder mehr Seiten hat. Sind in einer Figur alle Seiten gleich, so heißt sie gleichseitig; wenn alle Winkel gleich sind, so nennt man sie gleichwinkelig: jene Figur aber, welche gleichseitig und gleichwinkelig ist, heißt regelmäßig (regulär). Das regelmäßige Viereck d (Fig. 10.) wird insbesondere Quadrat genannt.

Um die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Figuren zu bestimmen, ist es nöthig zu untersuchen, wie oft eine dritte, als Einheit des Flächenmaßes angenommene in beiden erstern enthalten sei. Als jene Einheit aber wird das Quadrat betrachtet, dessen Seite die Einheit des Längenmaßes ist. Diese Einheit heißt Quadrat-Klafter, Q.-Schuh, Q. Zoll, je nachdem eine Seite des Quadrats eine Klafter, einen Schuh oder einen Zoll beträgt.

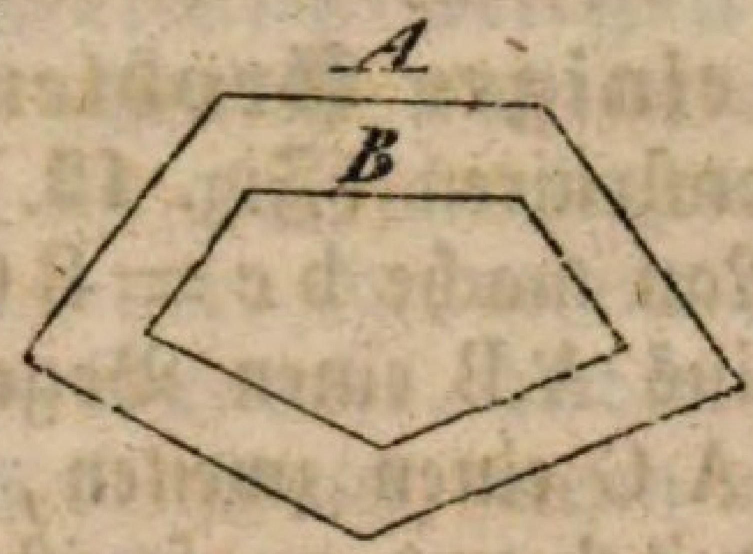
Zwei Figuren sind gleich, wenn sie dasselbe Vielfache der Einheit des Flächenmaßes sind. So findet man z. B. (Fig. 10.) A=B; denn beide Polygone sind das 14fache jener Einheit.

Fig. 10.



Zwei Figuren A und B (Fig. 11.) sind aber ähnlich, wenn sie genau dieselbe Beschaffenheit besitzen, und sich bloß durch ihre Größe unterscheiden.

Fig. 11.



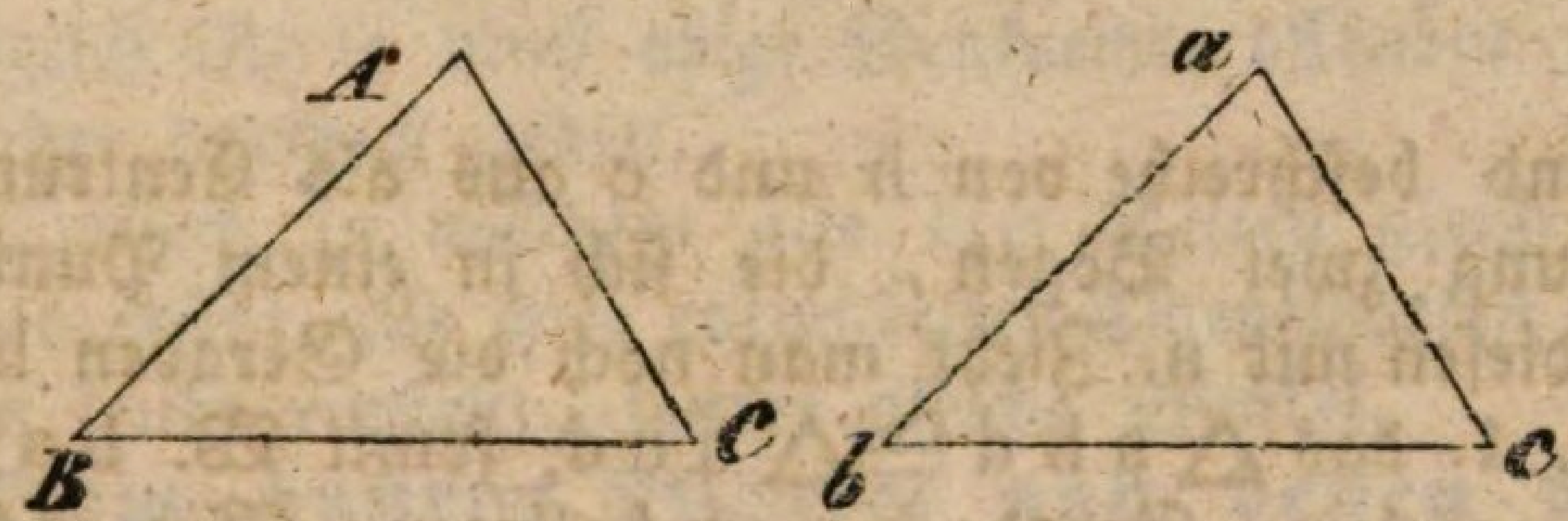
Die Gleichheit und Aehnlichkeit zweier Figuren begründet endlich ihre Kongruenz. Solche Figuren müssen, gehörig aufeinandergelegt, sich wechselseitig decken.

II. Grundeigenschaften der Dreiecke.

§. 10. Die wichtigsten Lehrsätze der Kongruenz.

1) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben; ist nämlich (Fig. 12.) AB = ab, AC = ac und

Fig. 12.



BC = bc, so muß das △ABC ≅ △abc sein. Man denke sich das △abc so auf ABC gelegt, daß die Seiten BC und bc mit ihren Endpunkten zusammenfallen; so kann offenbar a nur auf einen Punkt zu liegen kommen, der von B den Abstand ab = AB besitzt und gleichzeitig von C die Distanz ac = AC hat; aber oberhalb BC hat nur A allein die eben ausgesprochene Lage, folglich muß a auf A, somit auch ab auf AB und ac auf AC fallen, daher das △abc ≅ △ABC sein. Auch ersieht man, daß in kongruenten Dreiecken gleichen Winkeln gleiche Seiten und gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen.

2) Zwei Dreiecke ABC und abc, die zwei Seiten AB und ab, BC und bc und den von ihnen eingeschlossenen W. ABC und W. abc wechselweise gleich haben, sind kongruent. Da die gleichen Winkel auch gleiche Schenkel besitzen, so kann das △abc so auf ABC gelegt werden, daß c auf C, b auf B und a auf A fällt; dann muß aber auch ac auf AC zu liegen kommen, folglich ist △abc ≅ ABC.

3) Wenn zwei Dreiecke eine Seite BC und bc und die beiden derselben anliegenden W. B und b, C und c gleich haben, so sind sie kongruent. Da bc = BC ist, so kann das △abc so auf ABC gelegt werden, daß b auf B und c auf C zu liegen kommt; dann muß auch wegen W. b = B, ab auf AB fallen, somit a in der Richtung AB

liegen. Wegen der Gleichheit der W. c und C muß ferner a c die Lage A C erhalten, folglich a auch in die Richtung A C fallen; nachdem aber die Seiten A B und A C nur den Punkt A gemein haben, so kann daher a nur auf A zu liegen kommen, weßhalb die beiden Dreiecke kongruent sind.

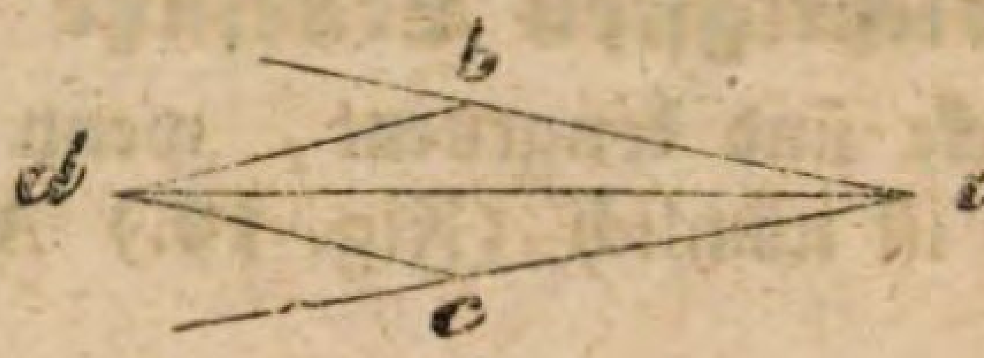
§. 11. **Auflösung einiger Probleme.**

1) Ein Dreieck zu konstruiren (Fig. 12.), welches einem gegebenen A B C kongruent ist. Man mache b c = B C, und beschreibe von b aus als Centrum mit dem Radius A B einen Bogen, hierauf von c als Centrum mit dem Halbmesser A C einen zweiten, welcher den frühern in a schneidet, und verbinde a mit b und c, so ist a b c das verlangte Dreieck; denn man findet b c = B C, a b = A B und a c = A C, somit ist nach §. 10 1. das △ a b c ≅ A B C.

2) Einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen B gleich ist. Man schneide auf den Schenkeln des Winkels B zwei beliebige Stücke B A und B C ab und ziehe die Gerade A C; wird nun nach 1. das △ a b c ≅ A B C konstruirt, so ist W. b = B.

3) Einen gegebenen Winkel a zu halbiren (Fig. 13.). Man mache

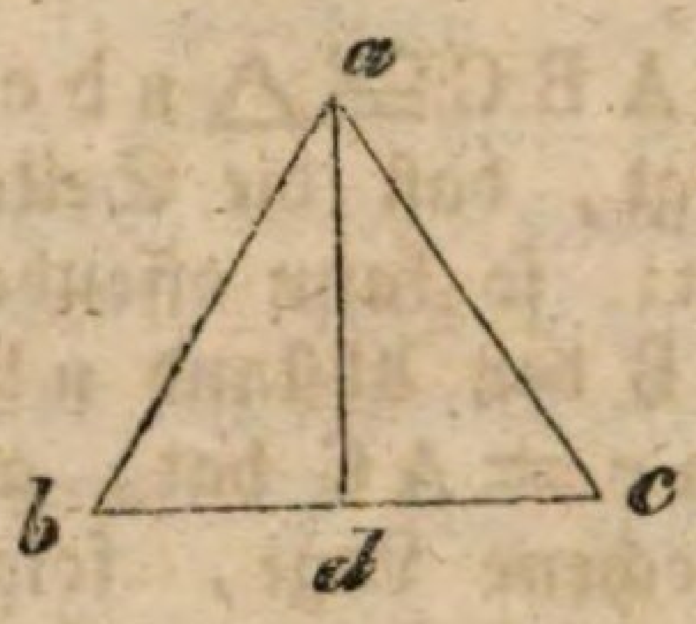
Fig. 13.



a b = a c, und beschreibe von b und c aus als Centrum mit derselben Zirkelöffnung zwei Bögen, die sich in einem Punkte d schneiden, und verbinde diesen mit a. Zieht man noch die Geraden b d und d c, so ist nach §. 10. 1. das △ a b d ≅ △ a c d, somit W. b a d = c a d.

4) Eine gegebene Gerade b c zu halbiren (Fig. 14.). Man beschreibe von b und c aus mit derselben Zirkelöffnung zwei Bögen, die sich in einem Punkte a schneiden, und halbire den W. a durch a d, so ist b d = d c, denn man findet a d = a d, a b = a c und W. b a d = c a d; also ist nach §. 10. 2. das △ a b d ≅ a c d daher b d = d c.

Fig. 14.



5) Von einem Punkte d einer Geraden b c auf sie eine Senkrechte zu errichten. Man mache d b = d c, beschreibe von b und c aus mit derselben Zirkelöffnung zwei in a sich schneidende Bögen, und ziehe die Gerade a d, so ist a d ⊥ b c, denn es ist nach §. 10. 1. das △ a b d ≅ a c d, daher W. a d b = a d c.

6) Von einem außerhalb einer Geraden b c liegenden Punkte a auf sie eine Senkrechte zu ziehen. Man nehme in der gegebenen Geraden einen beliebigen Punkt b an, und beschreibe von a mit dem Radius a b einen, jene Gerade in b und c schneidenden Bogen; wird nun b c in d

halbirt und a mit d verbunden, so ist a d $\perp$ b c. Zieht man noch die Geraden a b und a c, so folgt nach §. 10. 1., daß $\triangle$ a b d $\cong$ a c d, somit W. a d b = a d c sei.

§. 12. **Vom gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecke.** Ein Dreieck (Fig. 14.) a b c, in welchem zwei Seiten a b und a c gleich sind, heißt ein gleichschenkliges; jene beiden Seiten werden Schenkel, und die dritte b c wird Grundseite (Basis) genannt, den Punkt a nennt man die Spitze des Dreieckes. Ueber eine gegebene Basis b c wird ein gleichschenkliges Dreieck konstruirt, wenn man von den Punkten b und c aus mit derselben Zirkelöffnung zwei sich schneidende Bögen beschreibt, und den Punkt a mit b und c verbindet.

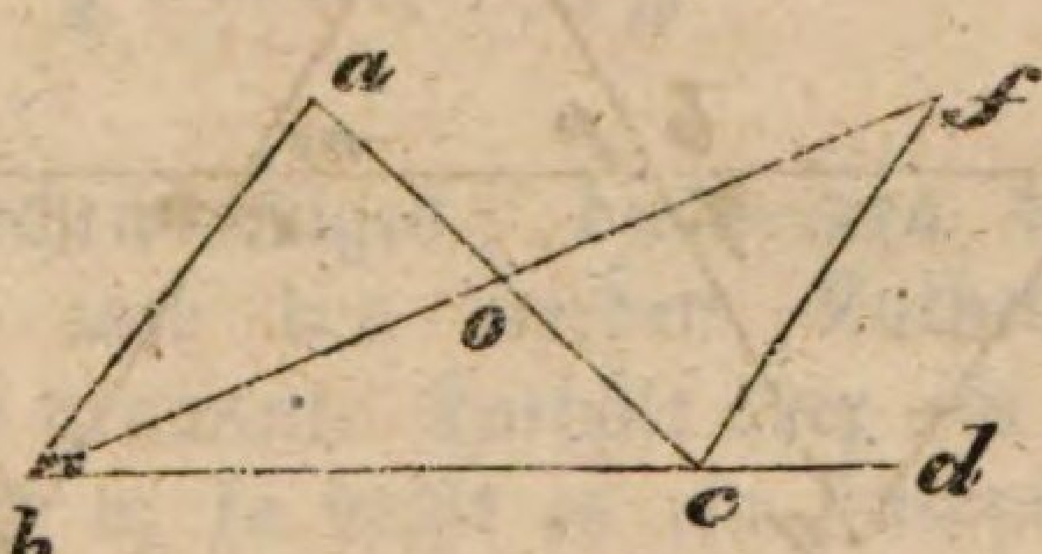
1) Wird der Mittelpunkt d der Basis b c mit der Spitze a verbunden, so ist nach §. 10. 1. das $\triangle$ a b d $\cong$ a c d, folglich muß W. b = c sein; d. h. im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Basis gleich. Ferner folgt aus obiger Kongruenz W. a d b = a d c = R, also a d $\perp$ b c; daher steht jene Verbindungslinie senkrecht auf der Basis. Endlich folgt aus jenen Dreiecken W. b a d = W. c a d; also halbirt die genannte Verbindungslinie den Winkel an der Spitze.

2) Wird vom Mittelpunkte d der Basis auf sie eine Senkrechte errichtet, so muß diese hinreichend verlängert durch die Spitze a gehen. Denn da die Verbindungslinie a d $\perp$ b c, und von d auf b c nur eine Senkrechte möglich ist, so muß obige Senkrechte offenbar mit a d zusammenfallen, daher durch a gehen.

3) Ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten gleich sind, heißt ein gleichseitiges; es besitzt alle hier entwickelten Eigenschaften und noch überdieß, wie man leicht einsieht, lauter gleiche Winkel.

§. 13. **Vom äußern Winkel und dessen Anwendung.** Der Winkel (Fig. 15.) a c d, den eine Dreieckseite a c mit der

Fig. 15.



Verlängerung c d einer andern b c bildet, heißt äußerer Winkel, und dieser ist stets größer als jeder innere Gegenwinkel a oder b. Um dieß zu beweisen halbire man a c in o, ziehe die Gerade b o, mache o f = b o und verbinde f mit c; so ergibt sich, da c o = a o, b o = f o und W. a o b = f o c, die Kongruenz der Dreiecke a b o und c f o, somit ist W. b a o = W. o c f, und wegen W. a c d > W. o c f folgt W. a < a c d. Auf ähnliche Art kann auch erwiesen werden, daß W. a c d > b sei, wenn man rücksichtlich b c dasselbe ausführt, was eben in Bezug auf a c geschehen ist, und a c verlängert.

In jedem Dreiecke a b c ist die Summe zweier Winkel $abc + acb < 2R$, denn verlängert man die Seite b c, so folgt W. $acb + acd = 2R$; allein es ist W. $acd > abc$, also findet man W. $abc + acb < 2R$.

Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Basis spitzig; denn ist b c die Basis des gleichschenkligen Dreieckes a b c, so folgt W. $abc + acb = 2$ W. $abc < 2R$, daher W. $abc =$ W. $acb < R$.

Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel spitzig.

§. 14. Eigenschaften der Dreieckseiten.

1) Da die Gerade B C (Fig. 12.) die kürzeste Linie ist, welche von B nach C gezogen werden kann, so muß die in A gebrochene Linie B A C länger als B C sein oder es ist $AB + AC > BC$; d. h. in jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

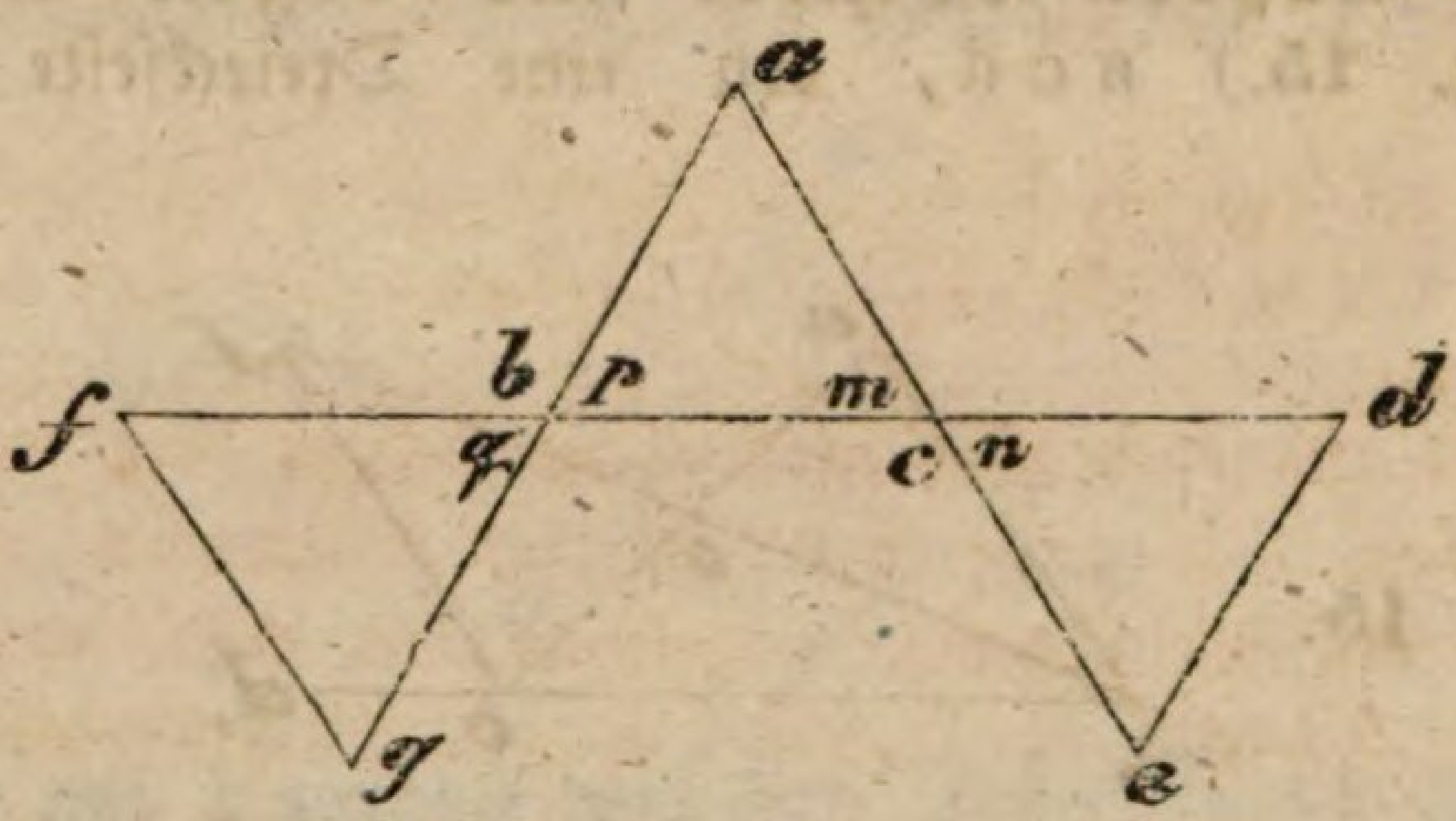
2) Wird von dem eben aufgestellten Ausdrucke beiderseits A B abgezogen, so ergibt sich $BC - AB < AC$; es ist nämlich die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

3) Drei gerade Linien, welche Seiten eines Dreieckes werden sollen, müssen also die hier entwickelten Eigenschaften besitzen; die ihre Längen darstellenden Größen können daher an die Formen $a + b$, $a + c$ und $b + c$, wo a, b und c von Null verschieden und positiv sind, gebunden erscheinen, denn es ist $(a + b) + (a + c) > b + c$, $(a + b) + (b + c) > a + c$, $(a + c) + (b + c) > a + b$.

§. 15. Relation zwischen den Winkeln und ihren Gegenseiten.

1) Sind in einem Dreiecke (Fig. 16.) a b c zwei Winkel p und m gleich, so sind es auch die Gegenseiten a c und a b, und daher ist

Fig. 16.

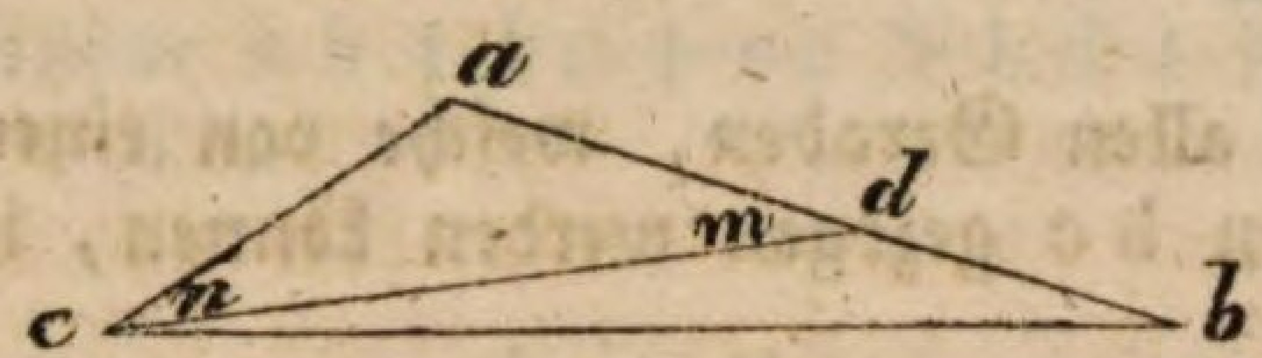


das Dreieck gleichschenklig. Macht man die Verlängerung $cd = bc$ und $ce = ac$ und verbindet d mit e, so ist wegen W. $n = m$ nach § 10. 2. das $\triangle cde \cong \triangle abc$. Auf gleiche Weise zeigt sich, wenn die Verlängerung $bf = bc$ und $bg = ab$ gemacht, und f mit g verbunden wird, wegen W. $q = p$ die Kongruenz der Dreiecke b f g und a b c, also ist auch $\triangle bfg \cong cde$; nun ist aber $bf = bc = cd$, und wegen $q = p = m = n$ auch $fg = de$, daher muß auch $bg = ce$ also $ab = ac$ sein.

Es ist auch einleuchtend, daß aus der Gleichheit aller Winkel eines Dreiecks die Gleichheit der Seiten folgt.

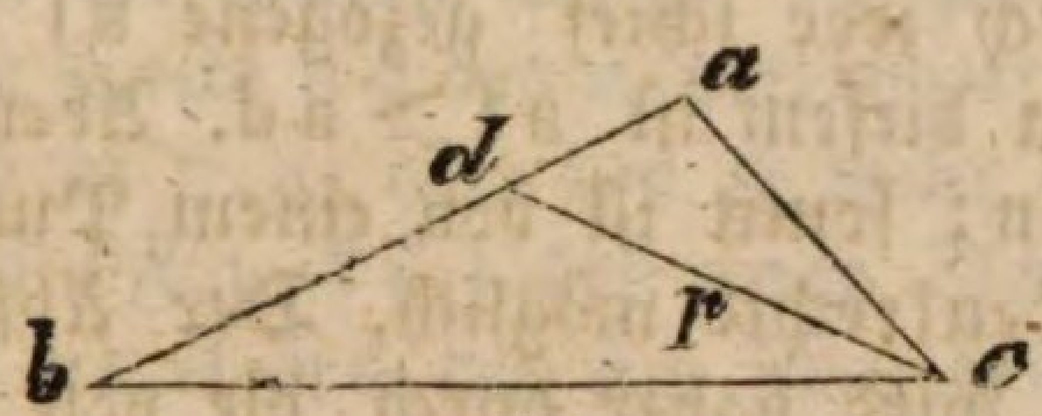
2) Sind in einem Dreiecke zwei Seiten ungleich, so muß der größern Seite auch ein größerer Winkel gegenüberliegen; ist nämlich (Fig. 17.) a b > a c, so ist auch W. c > b. Man mache a d = a c und ziehe d c, woraus W. m = n folgt; nun ist W. c > n, also auch c > m, aber nach §. 13. findet sich m > b, daher um so mehr c > b sein muß.

Fig. 17.



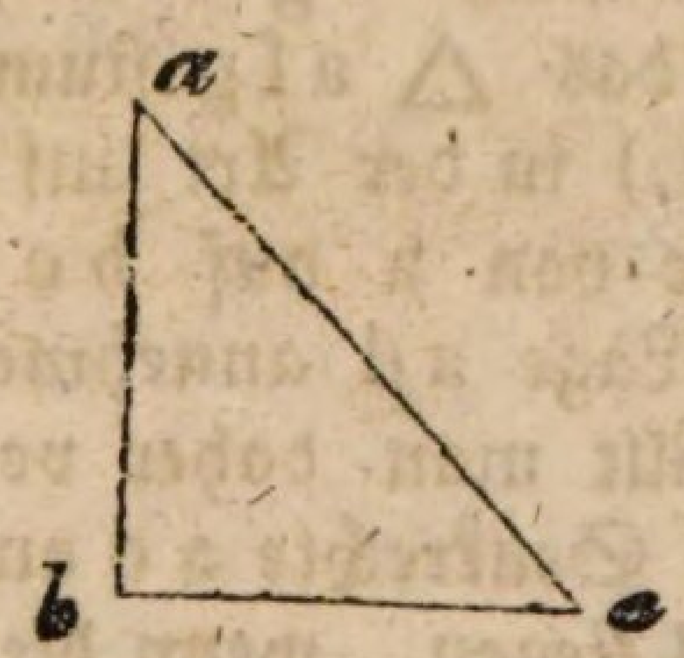
3) In jedem Dreiecke liegt dem größern Winkel die größere Seite gegenüber; wird nämlich (Fig. 18.) W. a c b > b vorausgesetzt, so folgt a b > a c. Da W. c > b ist, so konstruire man in c zu b c einen W. p = b, woraus b d = d c sich ergibt, nun ist aber a d + d c > a c oder a d + b d > a c, also hat man a b > a c.

Fig. 18.



§. 16. **Vom rechtwinkligen und stumpfwinkligen Dreiecke.** Ist in einem Dreiecke (Fig. 19.) a b c ein Winkel b ein

Fig. 19.



Rechter, so heißt es ein rechtwinkliges; die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten a b und b c werden Katheten und die dritte Seite a c wird Hypothenuse genannt. Enthält aber ein Dreieck (Fig. 20.) d e f einen stumpfen Winkel e, so heißt es ein stumpfwinkliges.

Fig. 20.



Die Winkel an der Hypothenuse sind immer spitzig; denn es ist (Fig. 19.) b + c < 2 R, somit wegen b = R offenbar W. c < R, eben so zeigt sich auch W. a < R. Folglich kann es in einem Dreiecke nur einen rechten Winkel geben. Auf gleiche Weise findet man, daß ein Dreieck nur einen stumpfen Winkel enthalten könne, und die beiden andern spitzig sein müssen. Nachdem im rechtwinkligen Dreiecke der rechte

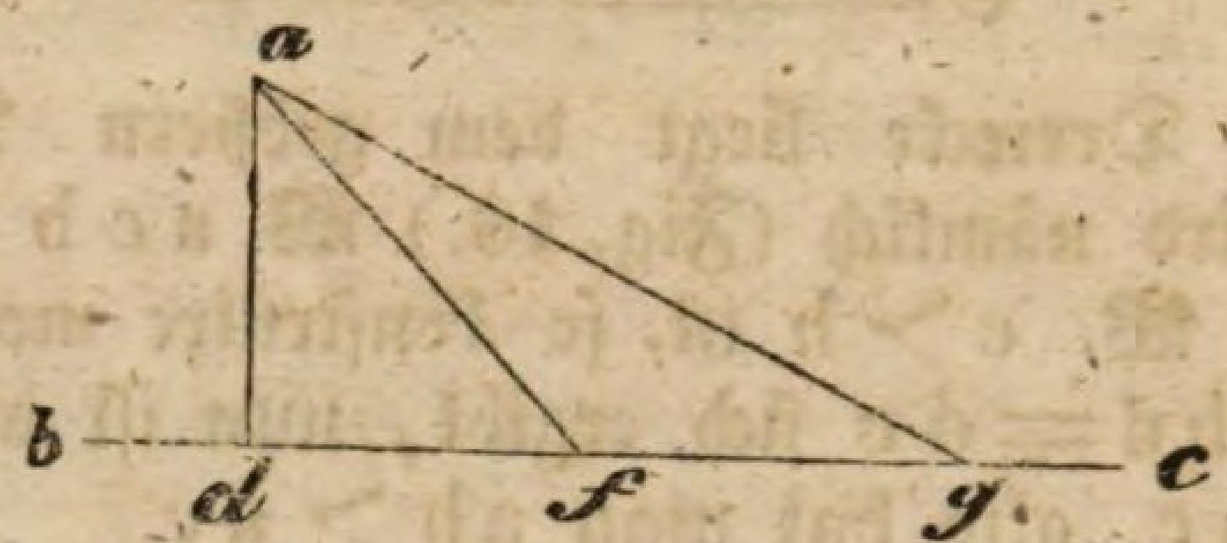
Winkel der größte ist, so muß also die Hypothenuse die größte Seite in demselben sein, und im stumpfwinkligen Dreiecke ist jene Seite die größte, die dem stumpfen Winkel gegenüberliegt.

Ein Dreieck, welches lauter spitzige Winkel enthält, heißt ein spitzwinkliges.

§. 17. **Ueber die senkrechte und schiefe Lage gerader Linien.**

1) Unter allen Geraden, welche von einem Punkte a (Fig. 21.) zu einer andern b c gezogen werden können, ist die Senkrechte a d die

Fig. 21.

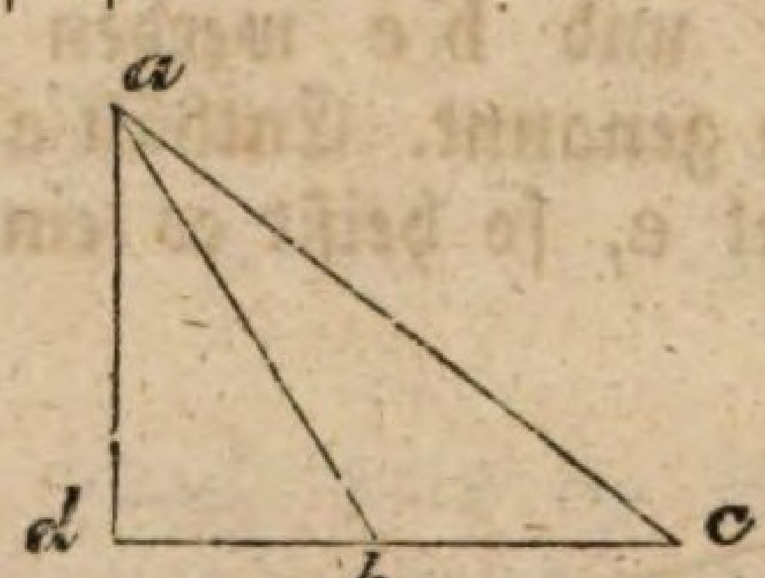


kürzeste; denn durch jede schief gezogene a f entsteht ein rechtwinkliges Dreieck a d f und in diesem ist a f > a d. Aber nur eine einzige Gerade kann die kürzeste sein; somit ist von einem Punkte a auf eine Gerade b c auch nur einzige Senkrechte möglich. Der Abstand eines Punktes a von einer Geraden b c wird daher durch die von a auf b c gezogene Senkrechte bestimmt.

2) Die von a (Fig. 21.) gezogenen Geraden werden desto länger, je schiefer sie sind, es ist nämlich a g > a f; denn es ist W. a f d < R, also W. a f g > R, folglich das △ a f g stumpfwinklig, daher a g > a f.

3) Wird a f (Fig. 21.) in der Art auf b c schief gezogen, daß der W. a f b < R, so muß die von a auf b c errichtete Senkrechte wegen jenes spitzigen Winkels die Lage a d annehmen, d. h. auf die Seite des spitzigen Winkels fallen. Fällt man daher von der Spitze a eines Dreieckes a b c (Fig. 14.) eine Senkrechte a d auf die Gegenseite b c, so muß diese innerhalb des Dreiecks liegen, wenn die der b c anliegenden Winkel spitzig sind; aber außerhalb des Dreiecks a b c fallen (Fig. 22.), wenn einer jener Winkel stumpf ist.

Fig. 22.



4) Die Senkrechte, welche von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis gezogen wird, muß daher immer im Dreiecke liegen, aber noch überdieß auch die Basis und das Dreieck halbiren; denn da die Gerade, welche den Mittelpunkt der Basis mit der Spitze verbindet, auf der Basis senkrecht steht, und von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese nur eine senkrechte möglich ist; so muß offenbar auch die Senkrechte, welche von der Spitze auf die Basis gezogen wird, durch jenen Mittelpunkt gehen, und daher auch das gleichschenklige Dreieck nach §. 10. 1. in zwei kongruente Dreiecke theilen.

§. 18. **Eigenschaften solcher Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Seite haben, und deren Anwendung.** Hier setzen wir voraus, daß die beiden Dreiecke aufeinanderliegen.

1) Befindet sich (Fig. 23.) die Spitze d des eines Dreiecks b d c innerhalb des andern a b c, so ist die Summe der beiden äußern Seiten $ab + ac$ größer als jene $bd + dc$ der innern. Da das $\triangle abc$ das andere umschließt, so ist offenbar $ab + bc + ac > bd + bc + dc$; daher auch $ab + ac > bd + dc$.

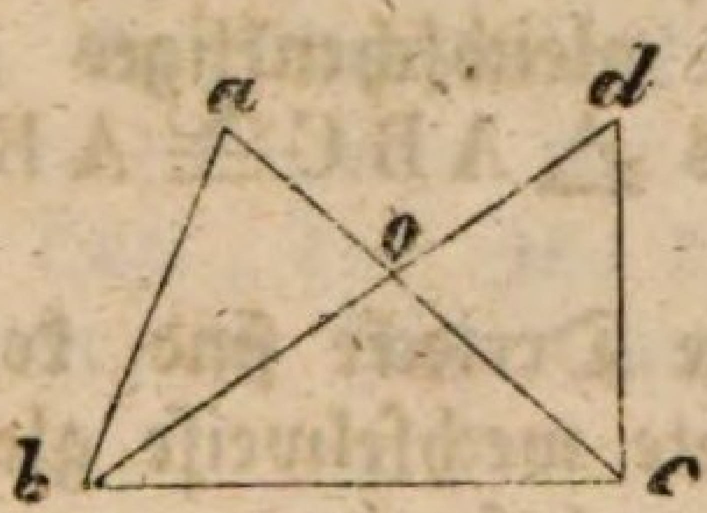
Fig. 23.



2) Der Winkel p an der innern Spitze ist größer als jener a an der äußern. Denn wird die Seite b d bis e verlängert, so ist nach §. 13. der äußere W. $p > m$ und $m > a$, also um so mehr W. $p > a$.

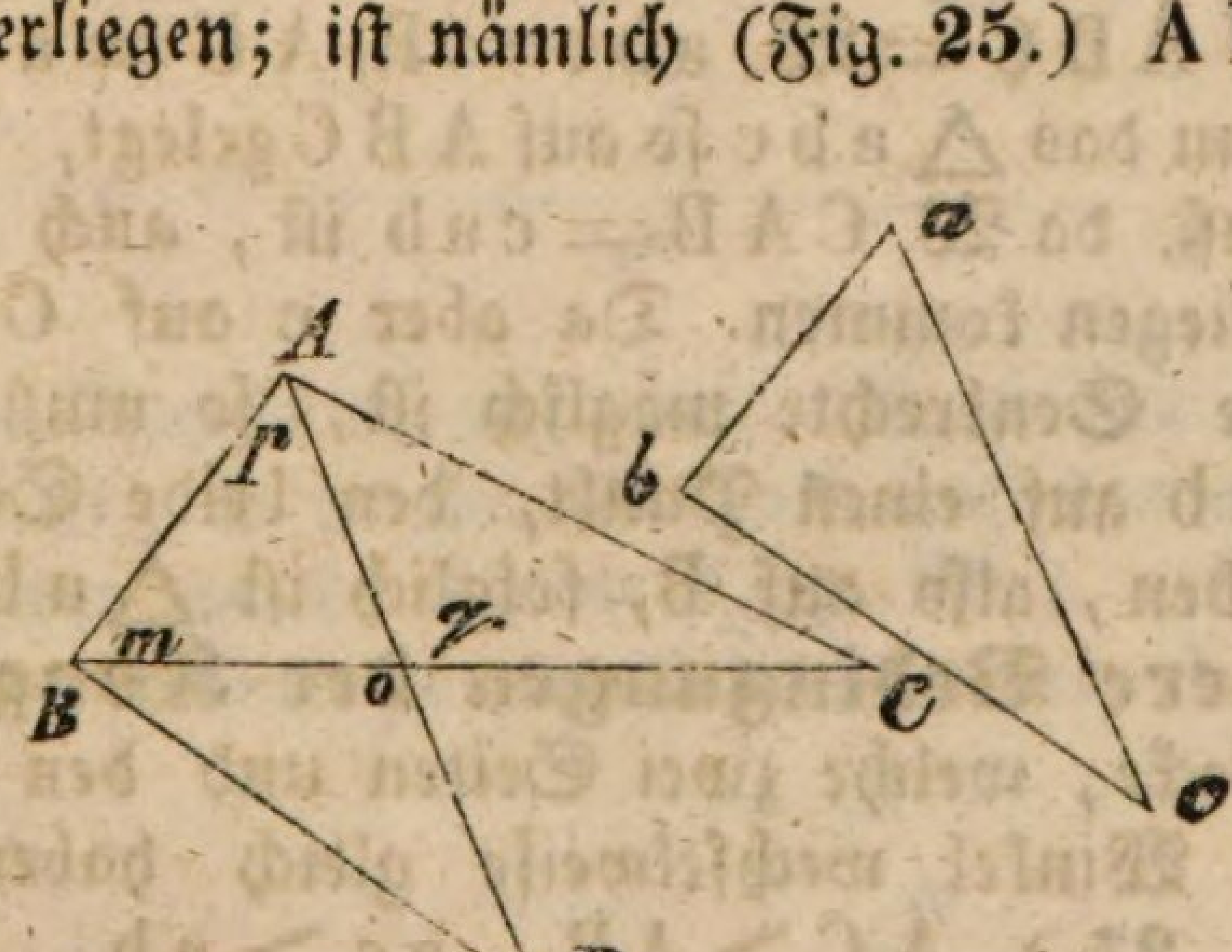
3) Liegt die Spitze d (Fig. 24.) des einen Dreiecks außerhalb des andern, so ist die Summe $ac + bd$ der sich schneidenden Seiten größer als jene $ab + dc$ der beiden andern. Denn man findet nach §. 14. 1. $ao + bo > ab$ und $do + oc > dc$, also auch $ao + bo + do + oc > ab + dc$, und wegen $ao + oc = ac$, $bo + do = bd$ ergibt sich $ac + bd > ab + dc$.

Fig. 24.



4) Haben zwei Dreiecke zwei Seiten wechselweise gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so muß dem größern Winkel die größere Seite gegenüberliegen; ist nämlich (Fig. 25.) $AB = ab$, $AC = ac$

Fig. 25.



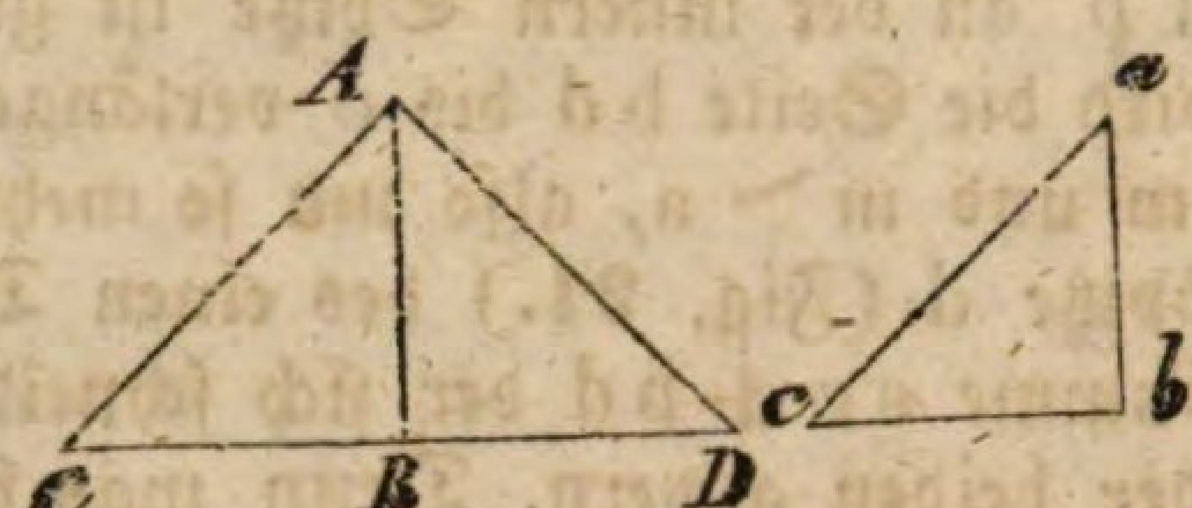
und W. $BAC > bac$, so ist auch $BC > bc$. Ist um dieß zu beweisen $AB < AC$, so konstruire man zu AB in A den W. $p = a$, und ziehe AO. Nun folgt wegen $AB < AC$ nach §. 15. 2. W. $C < m$, und nach

§. 13. W. q > m, also um so mehr q > C, somit nach §. 15. 3. AC > AO. Wird hierauf AD = AC = ac gemacht, und B mit D verbunden, so ist nach §. 10. 2. △ ABD ≅ △ abc, also BD = bc; nun ist aber AD + BC > AC + BD, daher auch wegen AD = AC der Ausdruck BC > BD, folglich BC > bc stattfindet.

§. 19. **Kongruenz rechtwinkliger Dreiecke.** Wendet man die im §. 10. entwickelten Sätze auf rechtwinklige Dreiecke an, so ergibt sich, daß zwei solche kongruent sind, wenn sie die beiden Katheten, und auch dann, wenn sie nur eine Kathete und den anliegenden spitzigen Winkel wechselweise gleich haben. Es lassen sich aber noch andere dießfällige Kennzeichen aufstellen, die hier entwickelt werden sollen.

1) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Kathete und den gegenüber liegenden Winkel wechselweise gleich haben; ist nämlich (Fig. 26.) W. ABC = W. abc = R, ferner AB = ab und

Fig. 26.



W. C = c, so muß △ ABC ≅ △ abc. Man konstruire zur Seite AB in A einen W. BAD = a und verlängere BC bis D, so ist das △ ABD ≅ abc, daher W. D = c, aber es ist auch W. C = c, somit W. D = C, also §. 15. 1. ACD ein gleichschenkliges Dreieck, und da AB ⊥ CD ist, so muß §. 17. 4. das △ ABC ≅ ABD, folglich auch △ ABC ≅ abc sein.

2) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie die Hypothenuse und eine Kathete wechselweise gleich haben. Dieser Satz läßt sich wie der vorhergehende rechtfertigen.

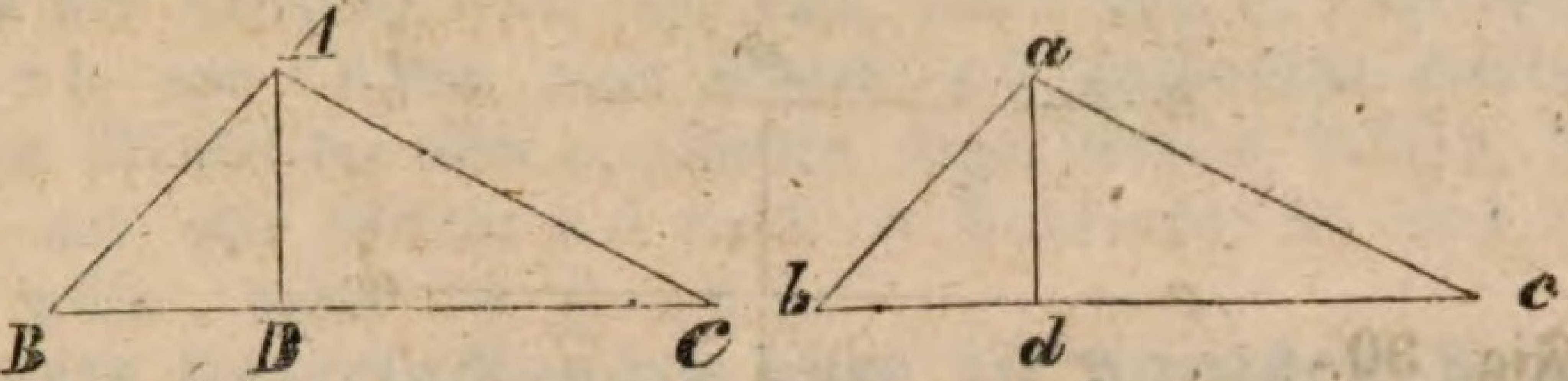
3) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie die Hypothenuse und einen anliegenden Winkel wechselweise gleich haben. Es sei (Fig. 26.) W. ABC = W. abc = R, AC = ac und W. CAB = W. cab. Wird nun das △ abc so auf ABC gelegt, daß c auf C und a auf A fällt, so muß, da W. CAB = cab ist, auch die Seite ab in die Richtung AB zu liegen kommen. Da aber c auf C liegt, und von C auf AB nur eine Senkrechte möglich ist, so muß auch cb auf CB fallen; somit fällt b auf einen Punkt, den beide Seiten AB und BC gemeinschaftlich haben, also auf B, folglich ist △ abc ≅ ABC.

§. 20. **Fernere Bedingungen der Kongruenz.**

1) Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten und den der größern Seite gegenüberliegenden Winkel wechselweise gleich haben, sind kongruent. Ist nämlich (Fig. 27.) AC > AB, ac > ab, ferner AB = ab, AC = ac und W. B = b, so muß △ ABC ≅ △ abc sein. Zieht man von den Punkten A und a auf BC und bc die Senkrechten AD und ad, so ist nach §. 19. 3. das △ ABD ≅ △ abd, daher BD = bd und AD = ad. Nun ist aber auch §. 19. 2. das ADC ≅ adc, folglich

DC gleich dc, somit $BD + DC = bd + dc$ oder $BC = bc$. Da die Dreiecke ABC und abc schon vermöge der Voraussetzung auch die beiden andern Seiten wechselweise gleich haben, so sind sie also kongruent. Auf ähnliche Art wird auch der Satz erwiesen, wenn jene Senkrechten außerhalb der Dreiecke fallen.

Fig. 27.

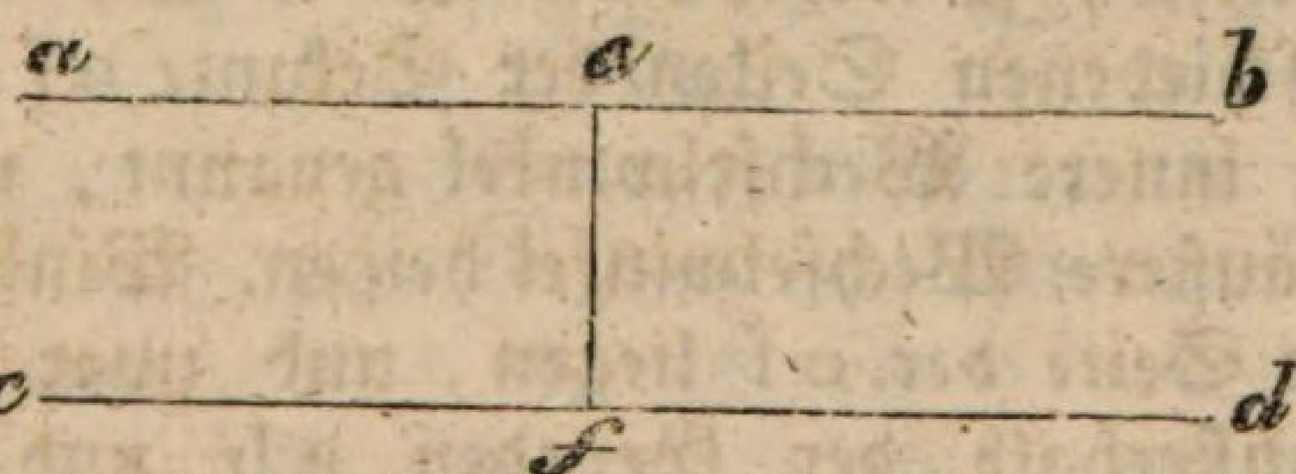


2) Haben zwei Dreiecke eine Seite, einen anliegenden und den gegenüberliegenden Winkel wechselweise gleich, so sind sie kongruent. Wird nämlich $AC = ac$, W. $C = c$ und W. $B = b$ vorausgesetzt, so ist das $\triangle ABC \cong \triangle abc$. Zieht man wie vorhin die Senkrechten AD und ad, so ist §. 19. 3. das $\triangle ADC \cong \triangle adc$, also $AD = ad$ und $DC = cd$. Nun zeigt sich aber, daß nach §. 19, 1. das $\triangle ABD \cong abd$ sei, daher $BD = bd$ sein müsse; folglich findet man $BD + DC = bd + dc$ oder $BC = bc$. Die beiden Dreiecke ABC und abc haben also zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich, und sind daher kongruent. Fallen die Senkrechten außerhalb jener Dreiecke, so wird der Beweis auf ähnliche Art geführt.

III. Von den parallelen Linien und ihrer nächsten Anwendung.

§. 21. **Erklärung der parallelen Lage und Folgerungen.** Haben zwei in einer Ebene liegende gerade Linien ab und cd (Fig. 28.) eine solche Lage, daß eine dritte ef auf beide zugleich senkrecht gezogen werden kann, so heißt man sie parallel, was durch $ab \parallel cd$ angezeigt wird.

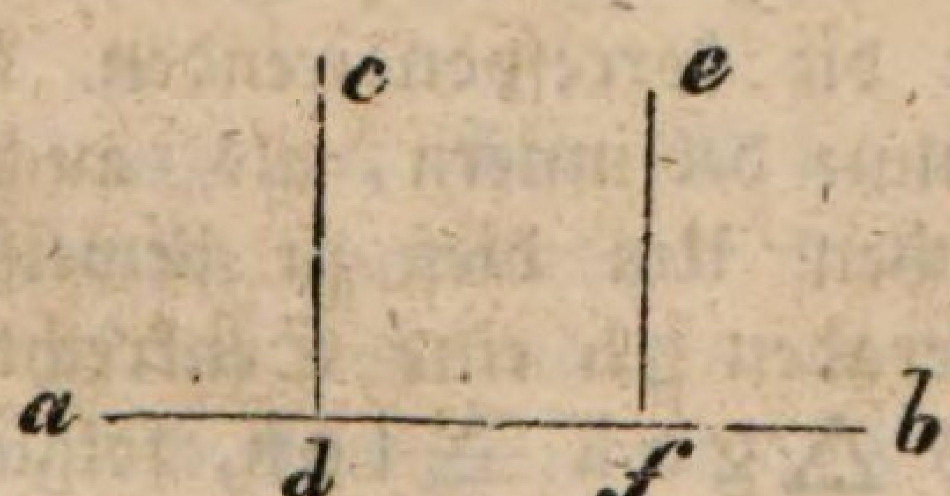
Fig. 28.



1) Wenn eine Gerade ef auf einer cd, zweier paralleler Linien ab und cd senkrecht steht, so ist sie also auch auf der andern ab senkrecht.

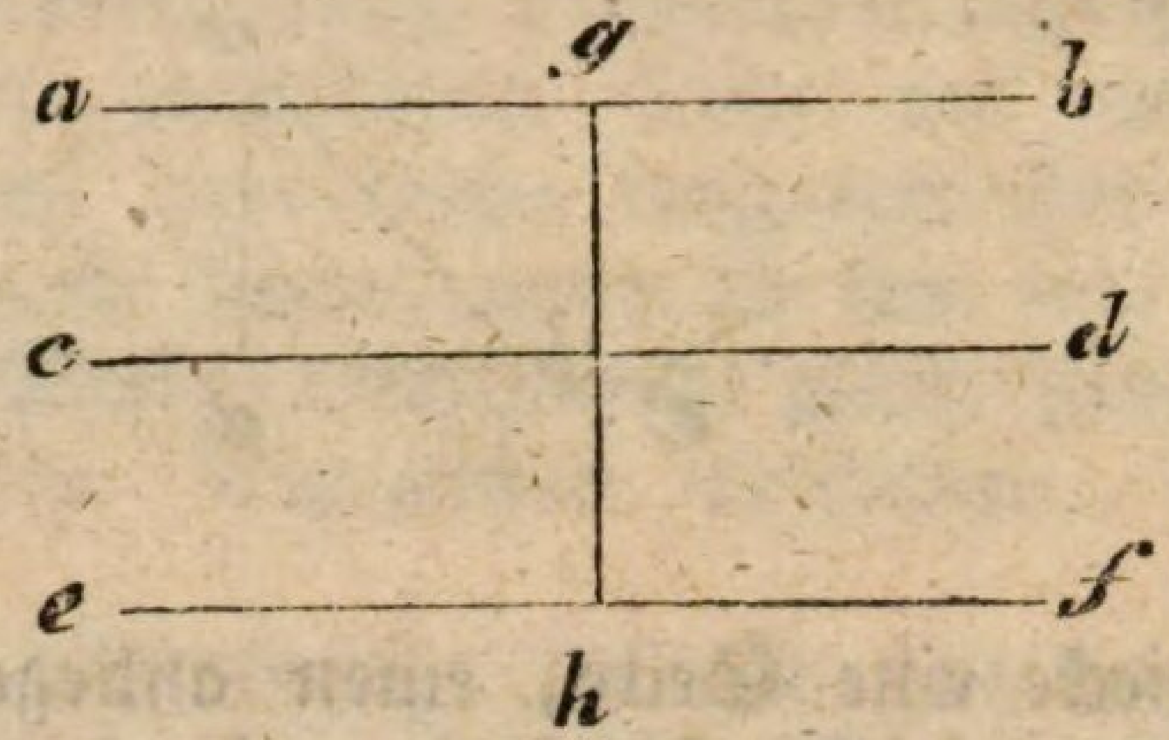
2) Stehen zwei gerade Linien (Fig. 29.) cd und ef auf einer dritten ab senkrecht, so sind sie parallel; denn es ist in diesem Falle $ab \perp cd$ und ef.

Fig. 29.



3) Zwei Gerade (Fig. 30.) a b und c d, welche einer dritten e f parallel sind, sind es auch unter sich. Es sei g h ⊥ a b und e f, da nun c d || e f und g h ⊥ e f ist, so muß auch nach 1. g h ⊥ c d, daher c d || a b sein.

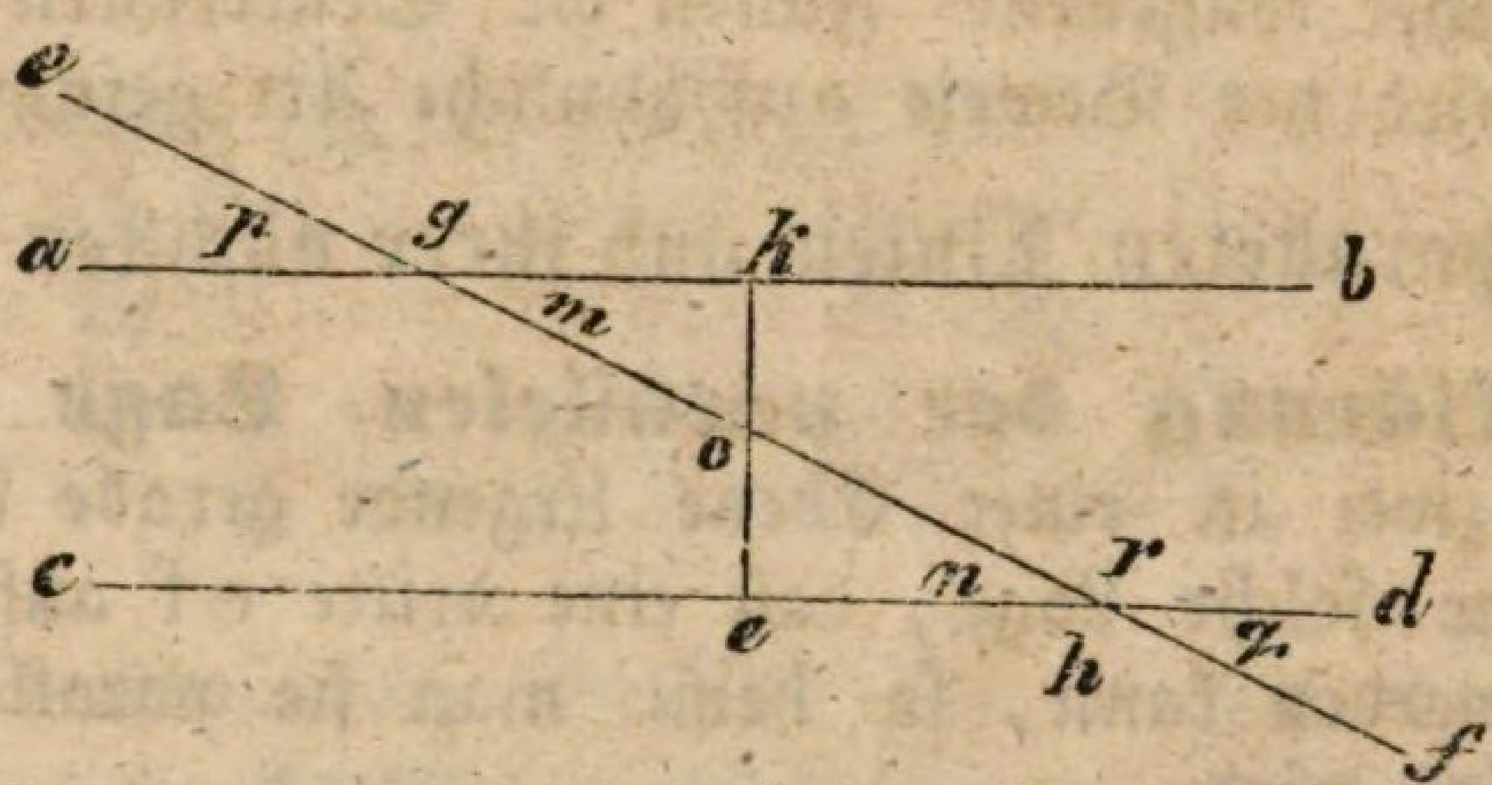
Fig. 30.



4) Durch einen Punkt (Fig. 28.) e zu einer Geraden c d eine Parallele zu ziehen. Man ziehe e f ⊥ c d und hierauf a b ⊥ e f, so ist a b || c d. Durch einen Punkt e ist zu einer Geraden c d nur eine Parallele möglich, da von e aus auf e f nur eine Senkrechte gezogen werden kann.

§. 22. **Entwicklung besonderer Kennzeichen.** Werden zwei in einer Ebene gezogene Gerade a b und c d (Fig. 31.) von einer

Fig. 31.



dritten e f geschnitten, so werden die W. m und n, welche zwischen a b und c d auf verschiedenen Seiten der Sekante e f liegen und verschiedene Scheitel haben, innere Wechselwinkel genannt, während ihre Scheitelwinkel p und q äußere Wechselwinkel heißen. Winkel, wie m und q aber, die auf derselben Seite der e f liegen, und zwar der eine m innerhalb, der andere q außerhalb der Geraden a b und c d und verschiedene Scheitel haben, heißen korrespondirende Winkel. Solche Winkel endlich, wie m und r, die auf derselben Seite der Sekante e f und zwar zwischen a b und c d liegen, wollen wir innere Sekantenwinkel heißen, während s und q äußere Sekantenwinkel genannt werden sollen.

Wenn zwei parallele Gerade a b und c d von einer dritten e f geschnitten werden, so müssen sowohl die innern, als auch die äußern Wechselwinkel, ferner die korrespondirenden Winkel gleich sein, endlich muß sowohl die Summe der innern, als auch jene der äußern Sekantenwinkel 2 R ausmachen. Um dieß zu beweisen, ziehe man durch den Mittelpunkt o der Geraden g h eine Senkrechte k l auf a b und c d, so ist nach §. 19. 3. das △ g o k ≅ l o h, folglich W. m = n, und hieraus

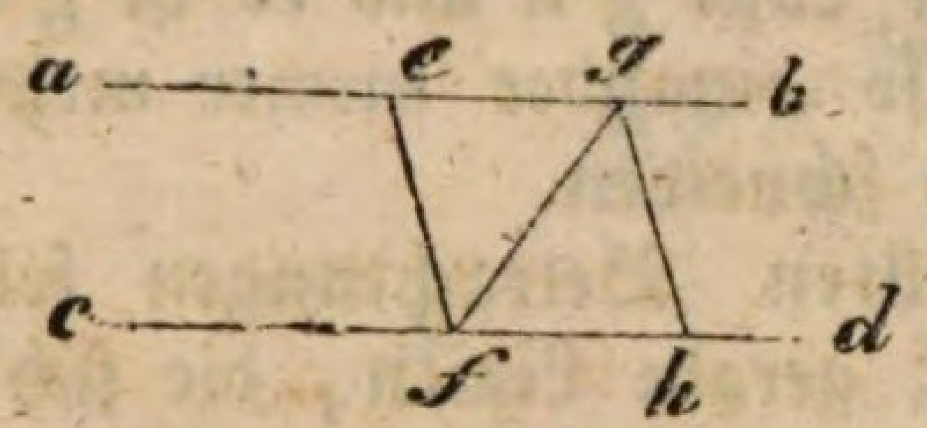
ergibt sich, da m = p und n = q ist, auch p = q. Da ferner m = n und n = q ist, so ist auch m = q; ferner zeigt sich wegen n + r = 2 R und W. n = m auch m + r = 2 R; endlich wird, weil s + m = 2 R und r + q = 2 R also s + m + r + q = 4 R ist, wenn man m + r = 2 R abzieht, s + q = 2 R gefunden.

Auf ähnliche Art überzeugt man sich, daß, wenn zwei in einer Ebene gezogene Gerade a b und c d von einer dritten e f geschnitten werden, und die genannten Winkel die oben erwähnten Eigenschaften besitzen, die ursprünglich nur auf eine Gerade c d errichtete Senkrechte k l auch auf a b senkrecht sein müsse, daher a b || c d sei.

§. 23. **Fernere Untersuchungen über die parallele Lage.**

1) Werden zwei parallele Linien (Fig. 32) a b und c d von zwei

Fig. 32.

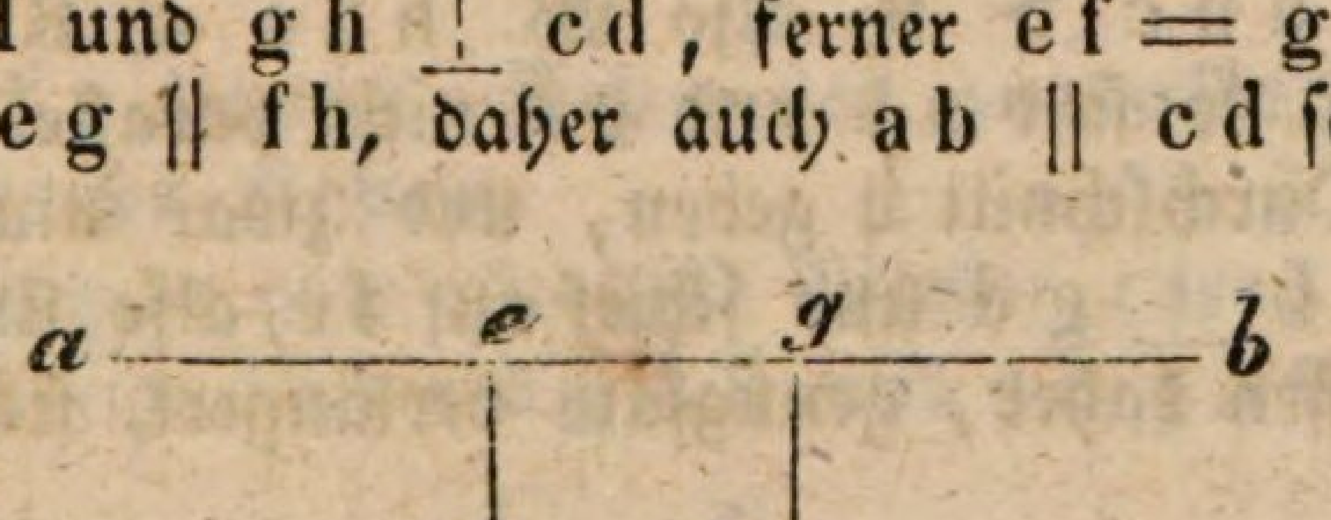


andern e f und g h geschnitten, so sind die gegenüberliegenden Abschnitte gleich. Zieht man die Gerade g f, so ist das △ e g f ≅ △ h g f, weil g f = g f, W. e g f = W. h f g und W. e f g = f g h ist; hieraus folgt e g = f h und e f = g h. Also sind auch die Senkrechten zwischen parallelen Linien gleich, und daher haben parallele Linien überall gleiche Abstände. Parallele Linien können sich also nie durchschneiden, und sich schneidende Linien können nicht parallel sein, weil auf beide zugleich keine Senkrechte möglich ist.

2) Sind zwei Gerade (Fig. 32.) e f und g h gleich und parallel, so müssen es auch die Verbindungslinien ihrer auf derselben Seite liegenden Endpunkte, nämlich e g und f h sein. Zieht man g f, so ist g f = g f, e f = g h und W. e f g = f g h, also △ e f g ≅ △ h f g, daher e g = f h und W. e g f = g f h, also muß e g || f h.

3) Haben zwei Punkte e und g einer Geraden a b von einer andern c d gleiche Abstände, so sind diese Gerade a b und c d parallel. Es sei (Fig. 33.) e f ⊥ c d und g h ⊥ c d, ferner e f = g h. Offenbar ist e f ∦ g h, also muß e g || f h, daher auch a b || c d sein.

Fig. 33.



4) Gerade Linien a b und c d (Fig. 33.), die sich nie schneiden, müssen offenbar gleiche Abstände voneinander haben, und daher parallel sein; denn sind e f und g h ⊥ c d und ist noch überdieß e f = g h, so folgt e f ∦ g h, also muß nach 2. e g, somit auch a b || c d sein.

5) Zwei gerade Linien (Fig. 34.) a b und c d, die nicht parallel sind, müssen sich schneiden. Ist e f ⊥ c d, so steht e f schief auf a b, und

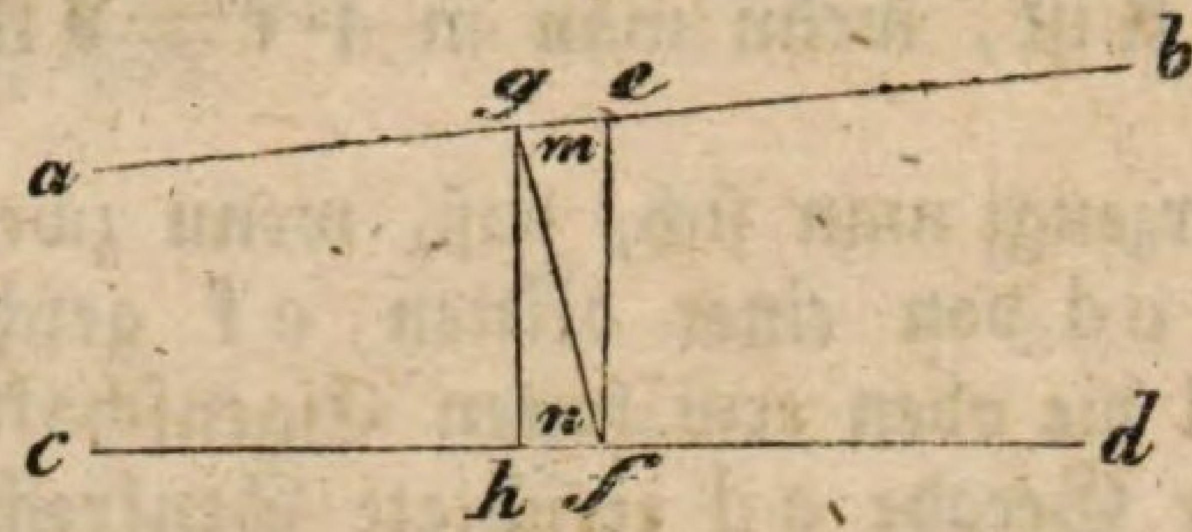


Fig. 34.

zwar sei W. m < R; die von f auf a b gezogene Senkrechte muß also nach §. 17, 3. die Lage f g annehmen, und noch überdieß im rechtwinkligen △ e f g, g f < e f sein. Da W. n < R ist, so erhält die von g auf c d errichtete Senkrechte die Lage g h und es ist g h < g f. Die Geraden a b und c d nähern sich also einander immer mehr, und müssen daher, hinreichend verlängert, sich schneiden.

6) Aus den angestellten Betrachtungen folgt: Parallele Linien können sich nicht schneiden; gerade Linien, die sich nie schneiden, müssen parallel sein; Gerade, die sich schneiden, können nicht parallel sein; gerade Linien, die nicht parallel sind, müssen sich schneiden.

7) Eine Gerade e f (Fig. 35.), welche eine c d zweier Parallelen a b und c d schneidet, muß, hinreichend verlängert, auch mit der andern a b zusammentreffen. Durch den Punkt g ist zu a b nur eine Parallele c d möglich, also ist e f nicht parallel mit a b, und daher muß e f, hinreichend verlängert, a b schneiden.

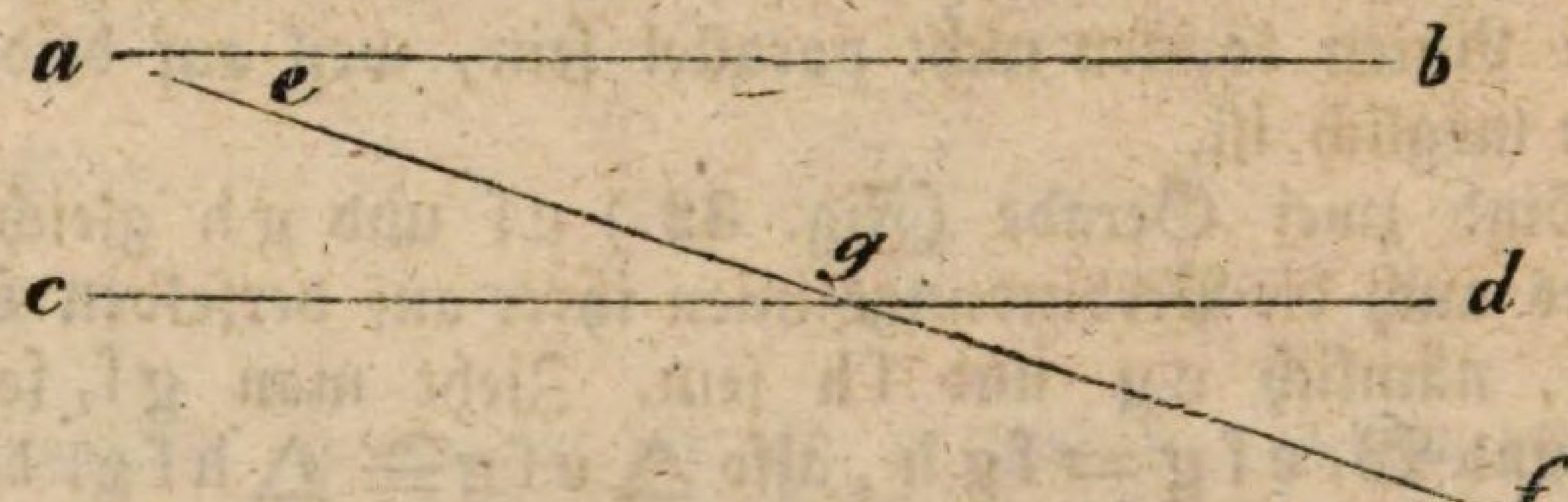


Fig. 35.

8) Zwei Gerade (Fig. 36.) g d und f e, welche auf zwei sich schneidenden Geraden a b und b c senkrecht stehen, müssen sich ebenfalls schneiden. Es sei W. a b c > R, also W. h b c < R. Da nun b e ⊥ f e und auf a b schief ist, so sind a b und e f nicht parallel; diese Geraden müssen also einen Durchschnitt h geben, und zwar muß der W. b h e < R sein. Nun ist a b ⊥ g d und schief auf f e, also sind g d und f e nicht parallel, und müssen daher, genugsam verlängert, sich schneiden.

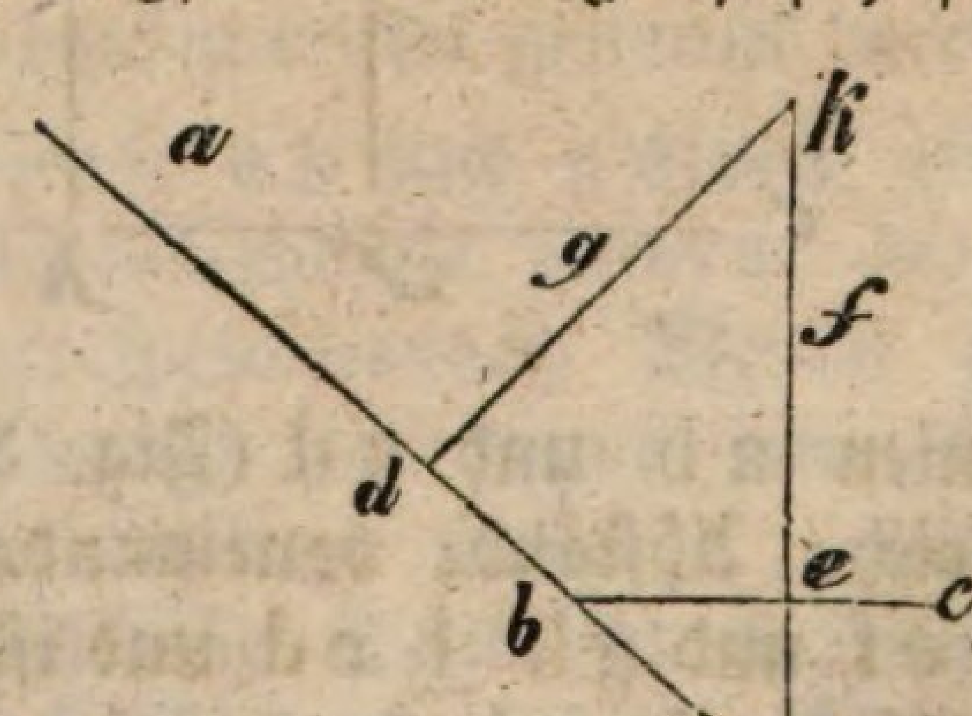


Fig. 36.

§. 24. Winkelsumme in Dreiecken und Polygonen.

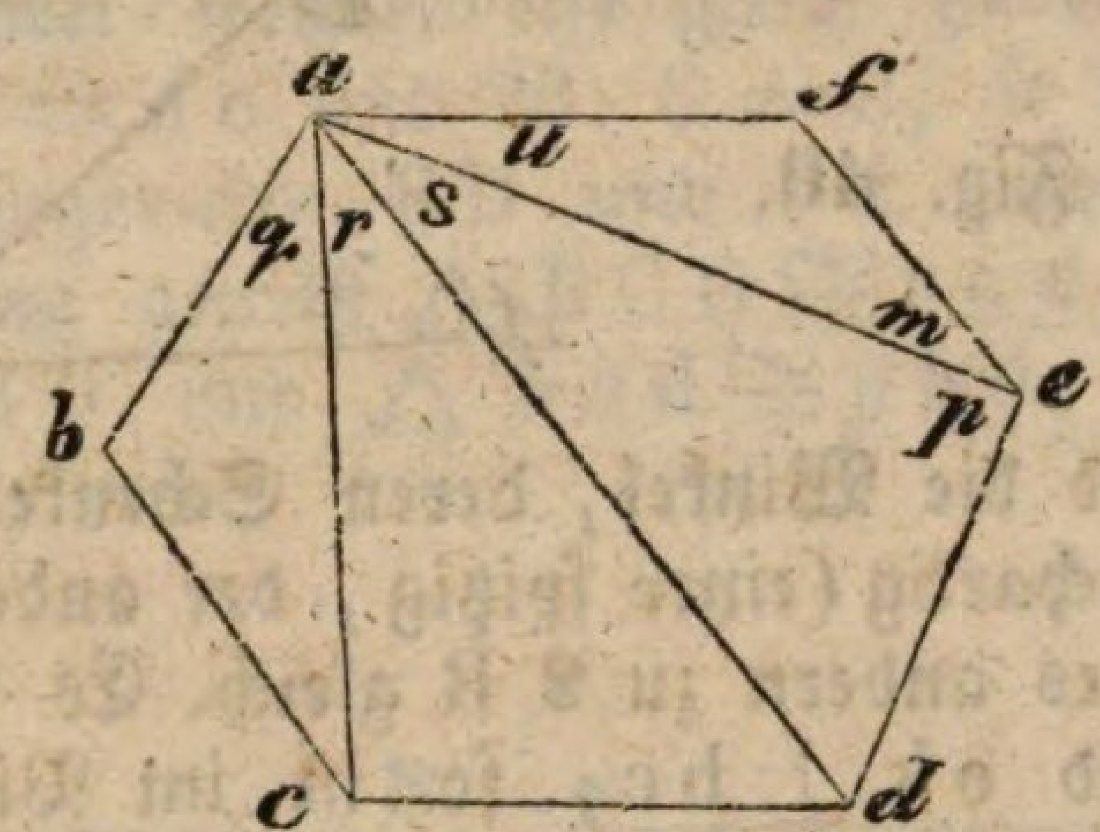
1) Der äußere W. a c d (Fig. 15.) eines Dreieckes a b c ist der Summe der innern Gegenwinkel a + b gleich. Um dieß zu beweisen ziehe man c f || a b; so ist W. a c f = a und W. d c f = b, daher W. a c d = a + b.

2) In jedem Dreiecke ist die Summe der Winkel 2 R; denn es ist W. a c b + a c d = 2 R, somit wegen W. a c d = a + b, auch W. a + b + a c b = 2 R. Im rechtwinkeligen Dreiecke ist also die Summe der Winkel an der Hypothenuse = R, und im gleichseitigen ist jeder Winkel $= \frac{2}{3}$ R.

3) Haben zwei Dreiecke zwei Winkel wechselweise gleich, so müssen auch die dritten einander gleich sein; denn letztere Winkel sind die Ergänzungen der Summe der beiden erstern zu 2 R.

4) Die Winkelsumme eines nseitigen Polygons (Fig. 37.) ist 2 n R

Fig. 37.



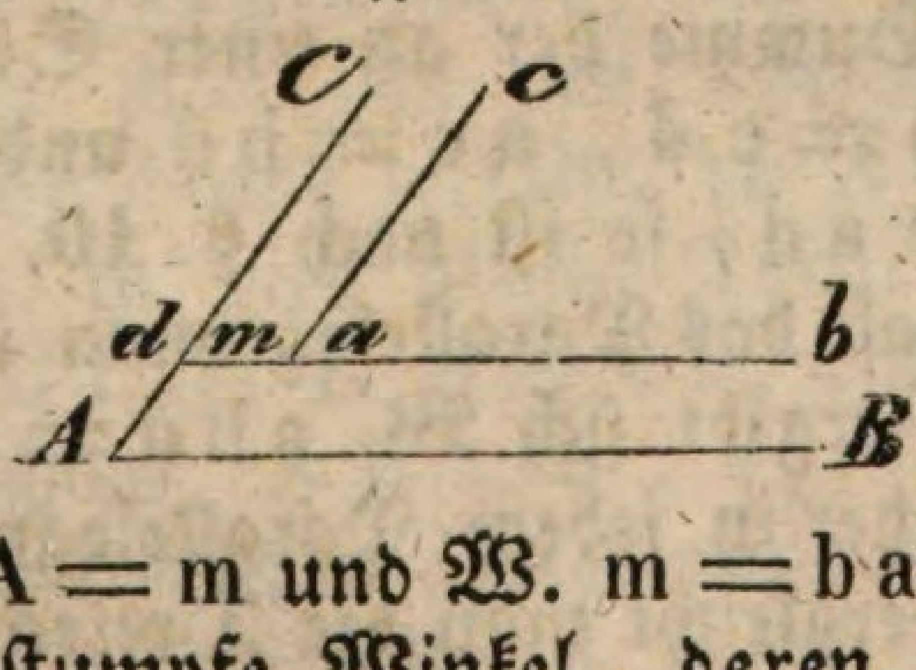
— 4 R. Denn betrachtet man das Sechseck a b c d e f, so findet man, daß die vom Scheitel eines Polygonwinkels a gezogenen Geraden a e, a d und a c, welche Diagonalen heißen, das Polygon in 6 — 2 = 4 Dreiecke theilen, deren einzelne Winkel theils Polygonwinkel sind, wie b und f; theils aber Bestandtheile derselben vorstellen, wie m und p, ferner q, r, s, u. Durch Summiren der Winkel jener Dreiecke erhält man daher die Summe aller Polygonwinkel. Wird das Gesagte auf ein nseitiges Polygon angewendet, so zerfällt es durch die früher erwähnten Diagonalen in n — 2 Dreiecke, und da die Summe der Winkel in denselben (n — 2) 2 R ist; so folgt für die Winkelsumme im nseitigen Polygone der Ausdruck 2 n R — 4 R.

5) Ist das Polygon regelmäßig, so sind alle Winkel gleich, folglich jeder 2 R — $\frac{4 R}{n}$

§. 25. Winkel, deren Schenkel parallel sind, oder aufeinander senkrecht stehen

1) Haben zwei spitzige oder stumpfe Winkel parallele Senkel, so sind sie gleich. Es sei (Fig. 38.) a b || A B und a c || A C, ferner a b bis

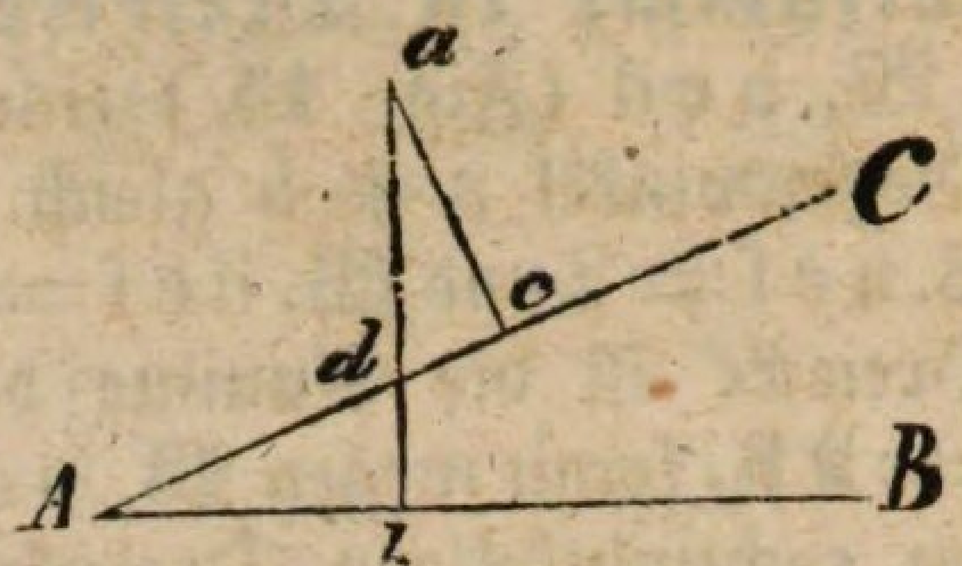
Fig. 38.



d verlängert, so folgt W. A = m und W. m = b a c, also W. A = b a c.

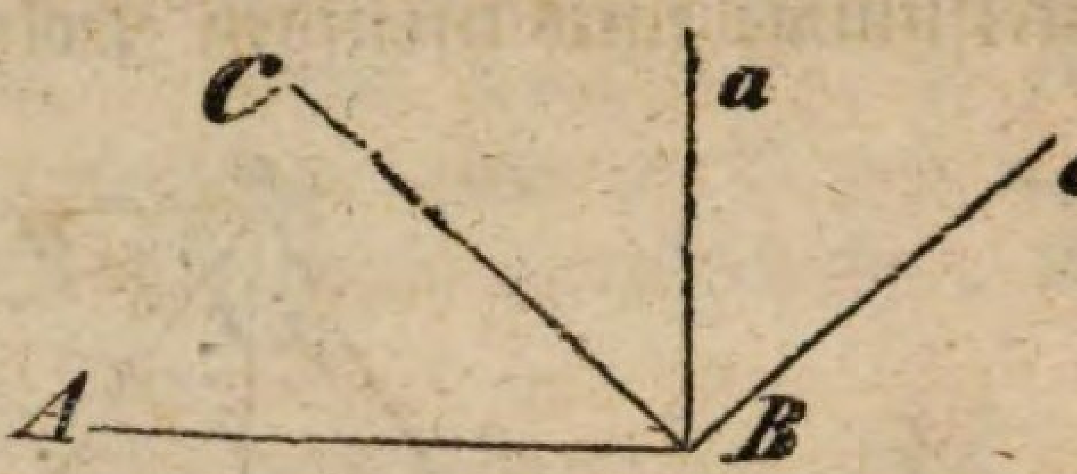
2) Zwei spitzige oder stumpfe Winkel, deren Schenkel aufeinander senkrecht stehen, sind gleich. Es sei (Fig. 39.) a b ⊥ A B und a c ⊥ A C,

Fig. 39.



so folgt W. A b d = a c d = R, ferner W. A d b = a d c als Scheitelwinkel, also muß auch §. 24. 3. W. A = a sein. Haben die beiden W. A B C und a B c die in (Fig. 40.) vorausgesetzte Lage, wo a B ⊥ A B und B c ⊥ B C ist, so findet man W. A B a = C B c = R, also auch, wenn der Winkel C B a abgezogen wird, W. A B C = a B c.

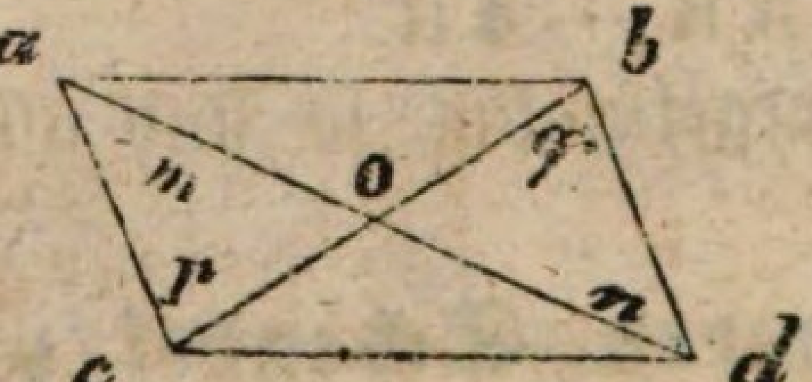
Fig. 40.



3) Sind die Winkel, deren Schenkel parallel laufen oder senkrecht stehen, ungleichartig (einer spitzig, der andere stumpf), so ist der eine der Ergänzung des andern zu 2 R gleich. Es sei (Fig. 36.) W. a b c > R, d k ⊥ a b und e k ⊥ b c, so ist im Vierecke b d k e nach §. 24 4. W. d b e + b e k + k + k d b = 2. 4 — 4 R = 4 R, aber es ist W. k d b + k e b = 2 R, also W. d b e + k = 2 R, und wegen W. d b e > R, ergibt sich W. k < R. Da nun d k ⊥ a b und schief auf k e steht, so ist a b nicht parallel mit k e, daher erhält man den Durchschnitt h. Aus der Vergleichung der Dreiecke d k h und b e h folgt endlich W. h = h, W. k d h = b e h = R, also W. k = h b c. Der Fall, wenn die Schenkel der Winkel parallel sind, ist für sich einleuchtend.

§. 26. **Von den Parallelogrammen.** Eine vierseitige Figur (Fig. 41.) a b c d, in welcher die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm.

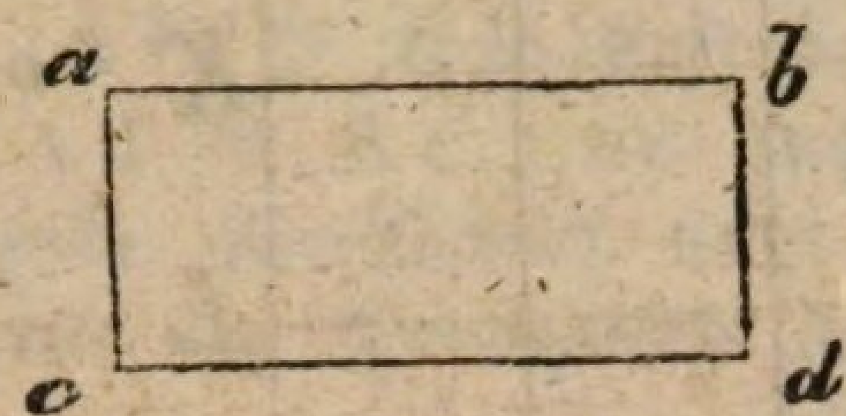
Fig. 41.



1) In jedem Parallelogramm sind also die gegenüberliegenden Seiten auch gleich, und die Summe der an einer Seite liegenden Winkel ist immer 2 R, nämlich a b = c d, a c = b d und W. b a c + a c d = 2 R. Zieht man die Gerade a d, so ist nach §. 10, 1. △ a b d ≅ a c d; folglich theilt die Diagonale das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke. Aus dieser Kongruenz ergibt sich W. a b d = a c d, und eben so zeigt sich W. b a c = b d c; daher in jedem Parallelogramm die gegenüberliegenden Winkel gleich sind. Vergleicht man die Dreiecke a o c und b o d, so folgt a c = b d, W. m = n und p = q, somit ihre Kongruenz, demnach ist a o

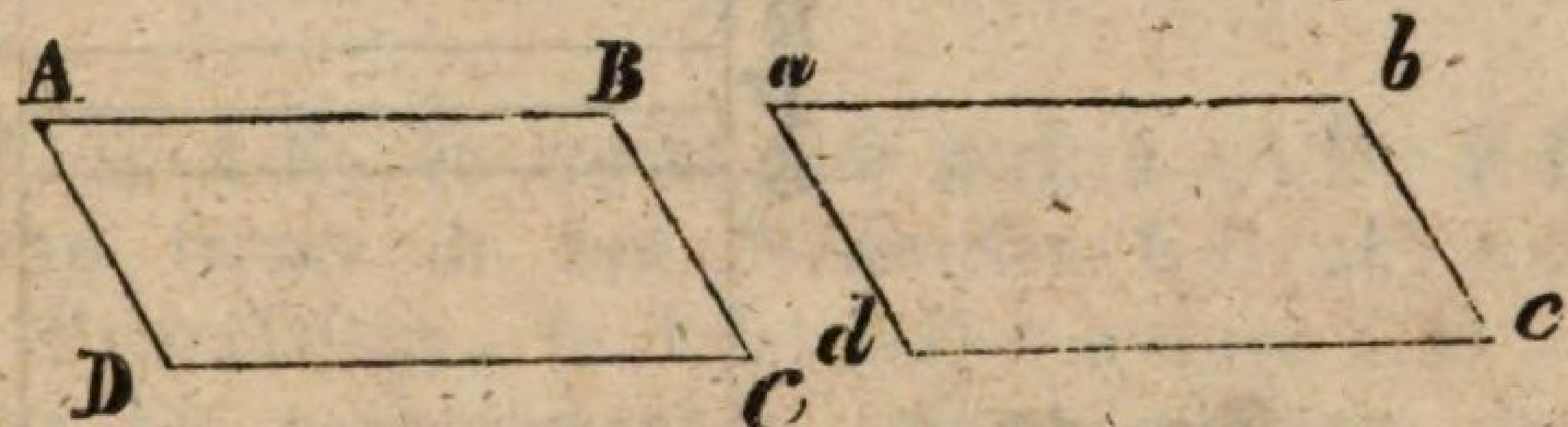
$= o\,d$ und $c\,o = b\,o$; es halbiren sich also die Diagonalen wechselseitig. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so müssen auch die übrigen rechte sein. Denn es sei W. $a = R$ (Fig. 42.), so ist auch W. $d = R$, und da $a + b = 2R$ ist, so folgt $b = R$, weßwegen auch W. $c = R$ sein muß. Ein solches Parallelogramm heißt Rechteck, und ist es gleichseitig, so ist es ein Quadrat.

Fig. 42.



2) Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich haben; ist nämlich (Fig. 43.) $B\,C = b\,c$, $D\,C = d\,c$ und W. $C = c$, so muß $A\,C \cong a\,c$ sein. Denkt man sich die Diagonalen $B\,D$ und $b\,d$ gezogen, so ist der ausgesprochenen Voraussetzung gemäß $\triangle\, B\,C\,D \cong b\,c\,d$, allein nach 1 ist auch $\triangle\, B\,C\,D \cong A\,B\,D$ und $\triangle\, b\,c\,d \cong a\,b\,d$, daher ist $A\,C \cong a\,c$.

Fig. 43.



3) Zwei Rechtecke sind also kongruent, wenn sie zwei Nebenseiten wechselweise gleich haben, weil die eingeschlossenen Winkel rechte sind. Zur Kongruenz zweier Quadrate ist schon die Kenntniß der wechselweisen Gleichheit bloß einer Seite hinreichend.

IV. Berechnung des Flächeninhalts der Figuren.

§. 27. **Vergleichung und Berechnung der Rechtecke.** Um den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, ist erforderlich, zu untersuchen, wie oft die Einheit des Flächenmaßes in derselben enthalten sei. Ist z. B. der Flächeninhalt des Rechteckes $A\,B\,D\,C$ (Fig. 44.), in welchem $C\,D$ die Grundseite und $A\,C$ die Höhe heißt, zu berechnen; ferner v die Einheit des Flächenmaßes, und zeigt sich $A\,B = 3\,.\,a\,b$, $A\,C = 4\,.\,a\,b$; so ziehe man von den Theilpunkten E und F, durch welche $A\,B$ in drei gleiche Theile zerfällt, zu $A\,C$, und von den Punkten G, H und I, welche $A\,C$ in vier gleiche Theile theilen, zu $A\,B$ parallele Linien, woraus $A\,K \cong G\,L \cong H\,M \cong I\,D$, daher $A\,D = 4\,.\,A\,K$ folgt. Nun ist aber das Rechteck $A\,K = 3\,.\,v$, somit ergibt sich $A\,D = 4\,.\,3\,.\,v = 12\,.\,v$. Bei solchen Berechnungen ist jedoch wohl zu merken, daß die Quadrat-Klafter $= 6\,.\,6 = 36$ Q.-Schuh; der Q.-Schuh

12 . 12 = 144 Q.-Zoll; der Q.-Zoll = 144 Q.-Linien enthalte, wovon man sich leicht überzeugt.

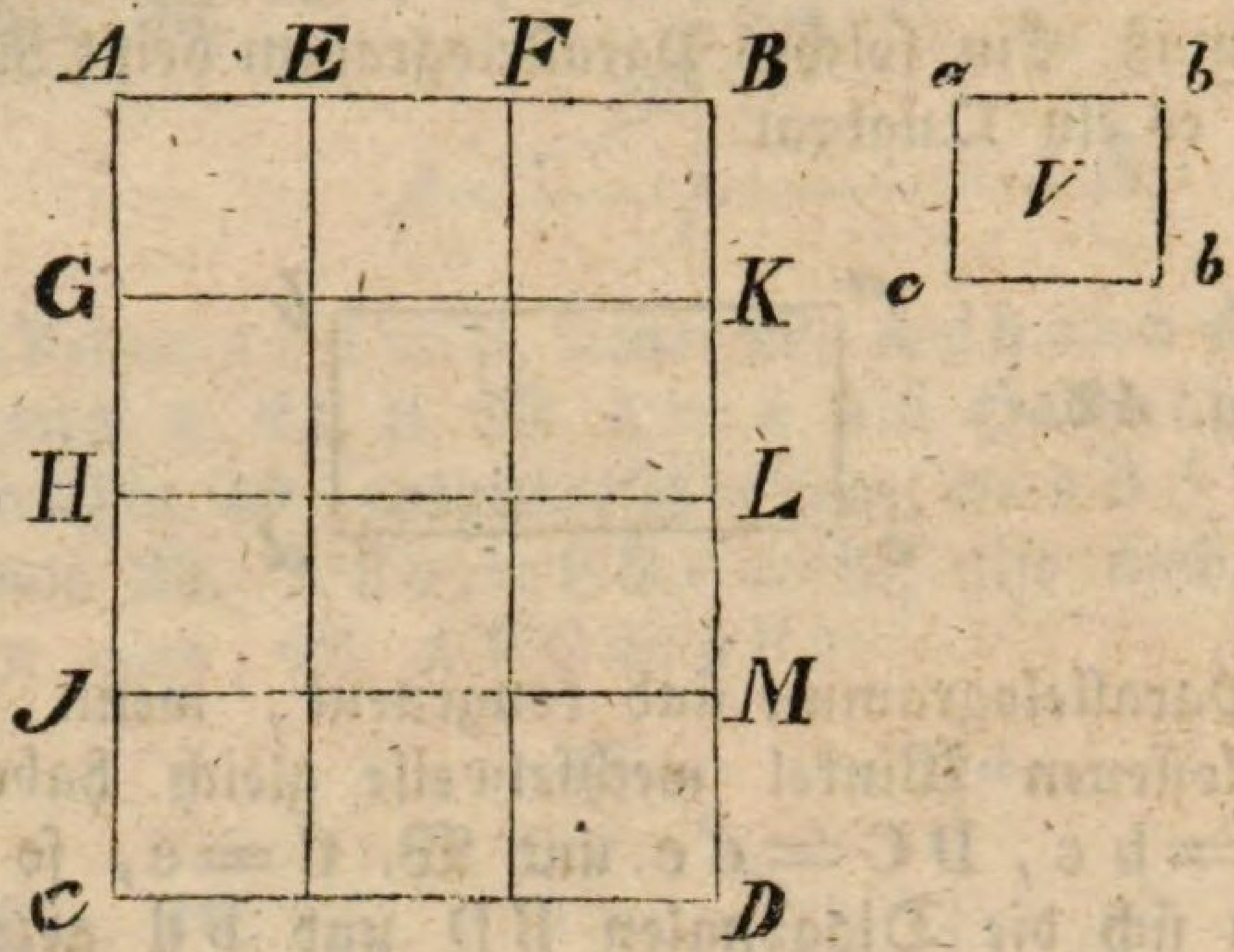


Fig. 44.

1) Zwei Rechtecke von gleichen Grundseiten verhalten sich wie ihre Höhen. Ist nämlich (Fig. 45.) CD = cd, so hat man die Proportion

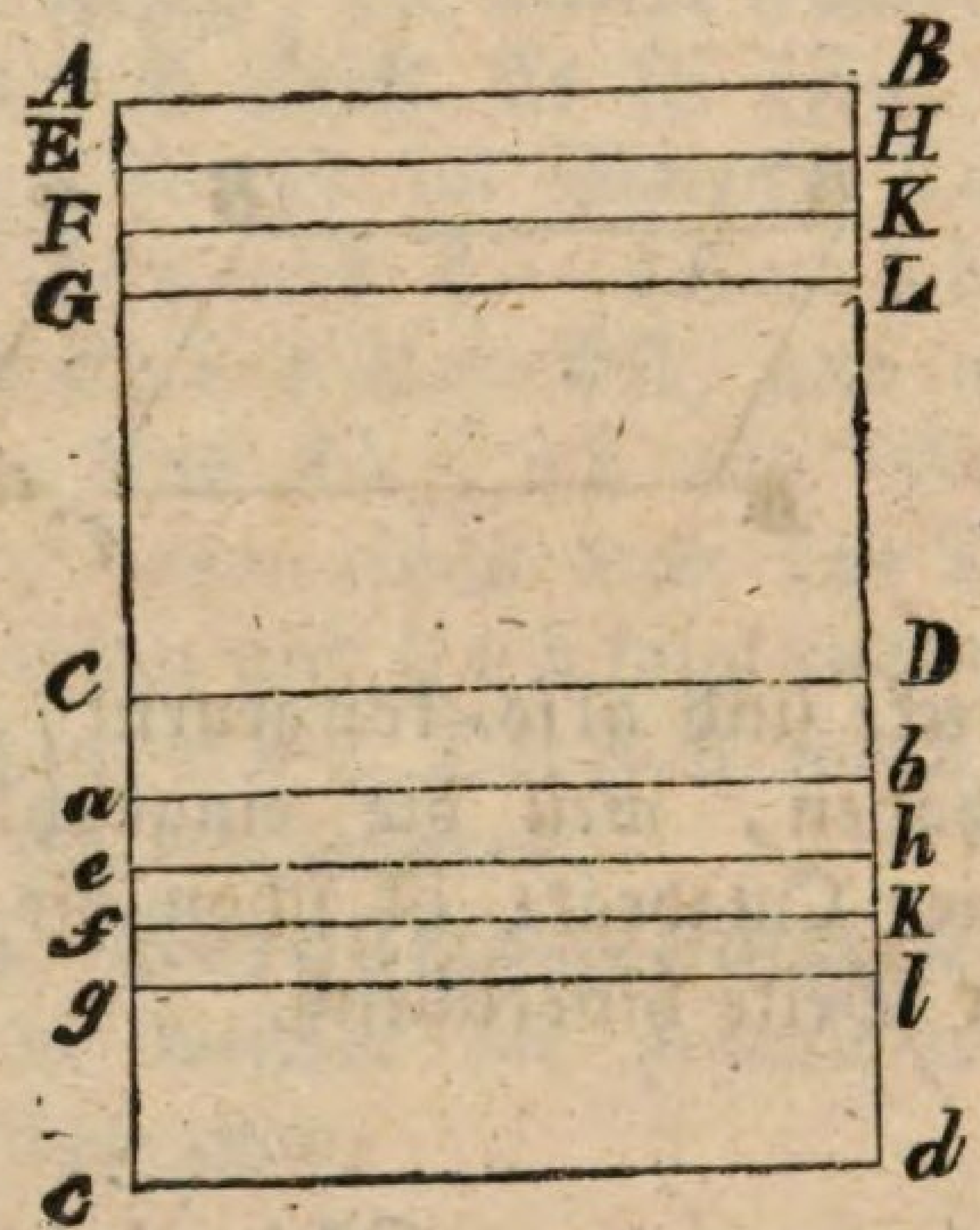


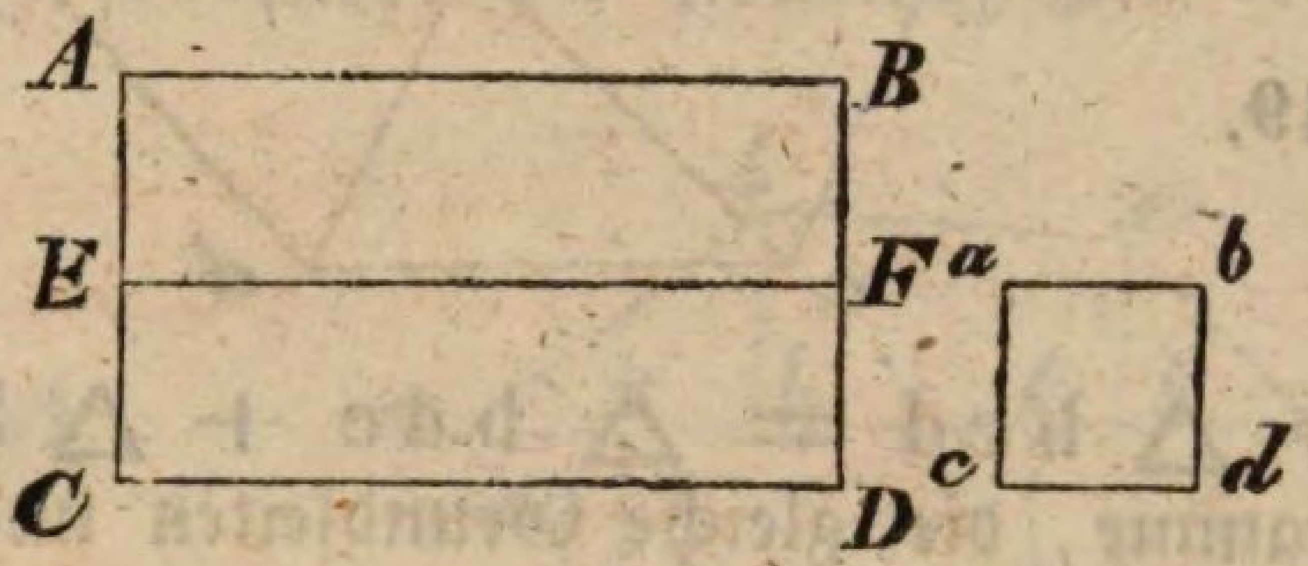
Fig. 45.

AD : ad = AC : ac. Ist das Verhältniß der Höhen AC und ac kommensurabel, und zwar m : n und α das denselben zukommende gemeinschaftliche Maß, so läßt sich dieses auf AC mmahl und auf ac nmahl auftragen. Zieht man nun von den auf AC entstandenen Theilpunkten E, F, G ... parallele Linien zu AB, so sind die sich ergebenden m Rechtecke AH, EK, FL ..., sämmtlich kongruent, daher AD = m . AH. Auf gleiche Weise findet man auch ad = n . ah. Allein es ist AH ≅ ah, weil AB = ab und AE = ae = α ist; somit ergibt sich AD : ad = m : n. Eben so verhalten sich aber die Höhen, folglich hat man AD : ad = AC : ac. Wenn aber für den Fall des inkommensurabeln Verhältnisses der Höhen AD : ad > AC : ac wäre, so könnte man AD : ad = FC : ac annehmen; denkt man sich ferner ac in eine so große Anzahl gleicher Theile getheilt, daß jeder einzelne kleiner als AF wird, und einen solchen Theil von C aus

auf AC so oft als möglich aufgetragen, so muß ein Theilpunkt zwischen A und F, z. B. auf E fallen. Wird nun von E aus mit AB eine Parallele EH gezogen, so hat man zwei Rechtecke ED und ad, deren Höhen EC und ac kommensurabel sind, daher die Proportion ED : ad = EC : ac darbieten. Vergleicht man dieselbe mit der vorhergehenden, so ergibt sich der Ausdruck AD : ED = FC : EC, welcher nicht stattfinden kann, da AD > ED und FC < EC ist; daher auch obige Annahme AD : ad > AC : ac nicht richtig ist. Eben so zeigt sich aber auch, daß das erste Verhältniß nicht kleiner als das zweite sein kann; folglich muß immer die Proportion AD : ac = AC : ac gelten.

2) Zwei Rechtecke stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundseiten und Höhen, nämlich AD : ad = CD. AC : cd . ac. Man schneide, um dieß zu beweisen, auf AC (Fig. 46.) das Stück CE

Fig. 46.



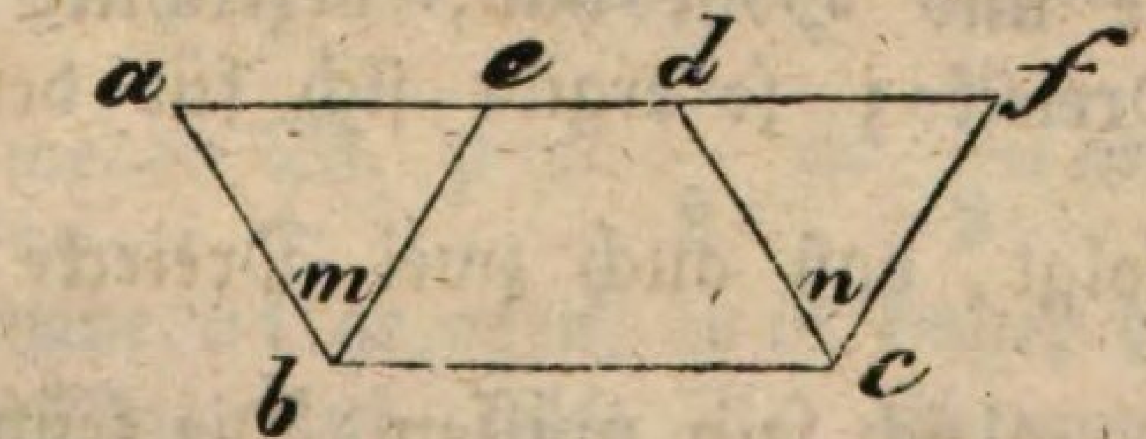
= ac ab und ziehe EF ‖ AB, so ergibt sich nach **1**. AD : ED = AC : EC. Betrachtet man ferner in den Rechtecken ED und ad die Seiten EC und ac als Grundseiten, so folgt ED : ad = CD : cd. Wird diese Proportion mit der vorhergehenden zusammengesetzt, so hat man, wegen EC = ac, AD : ad = AC . CD : ac . cd. Ist nun ad die Einheit des Flächenmaßes, also ac = cd = **1**, so folgt AD : ad = AC . CD : **1**, also AD = AC . CD . ad, d. h. die Einheit des Flächenmaßes ist in dem Rechtecke so oft enthalten, als das Produkt aus der Grundseite mit der Höhe anzeigt. Setzt man auch ad = **1**, so findet man endlich AD = AC . CD. Es wird also der Flächeninhalt eines Rechteckes gefunden, wenn man die Grundseite mit der Höhe multiplicirt.

3) Der Flächeninhalt eines Quadrats wird berechnet, wenn man eine Seite auf die zweite Potenz erhebt; denn ist in obiger Gleichung DC = AC, so folgt AD = AC^2.

§. **28. Vergleichung und Berechnung der schiefen Parallelogramme.**

1) Zwei Parallelogramme ac und ec (Fig. 47.), welche dieselb

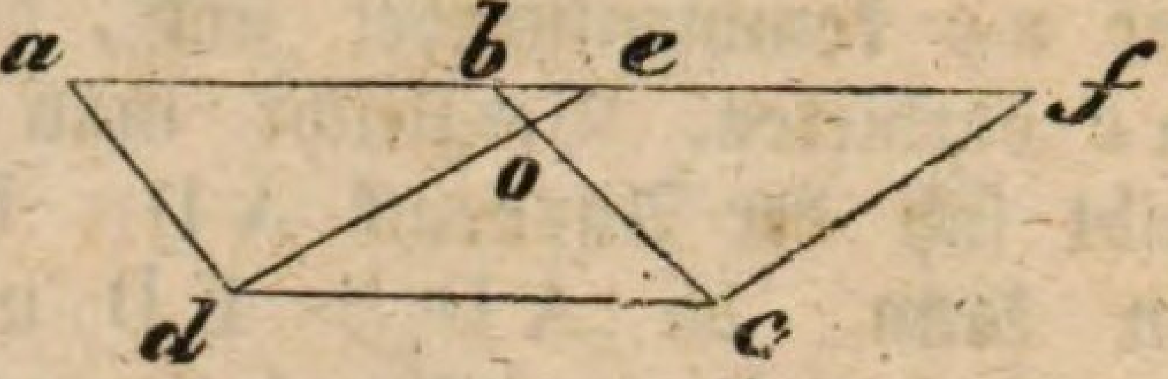
Fig. 47.



Basis bc besitzen, und zwischen denselben Parallelen af und bc liegen, sind gleich. Wegen ab = dc, be = cf und W. m = n ist das △

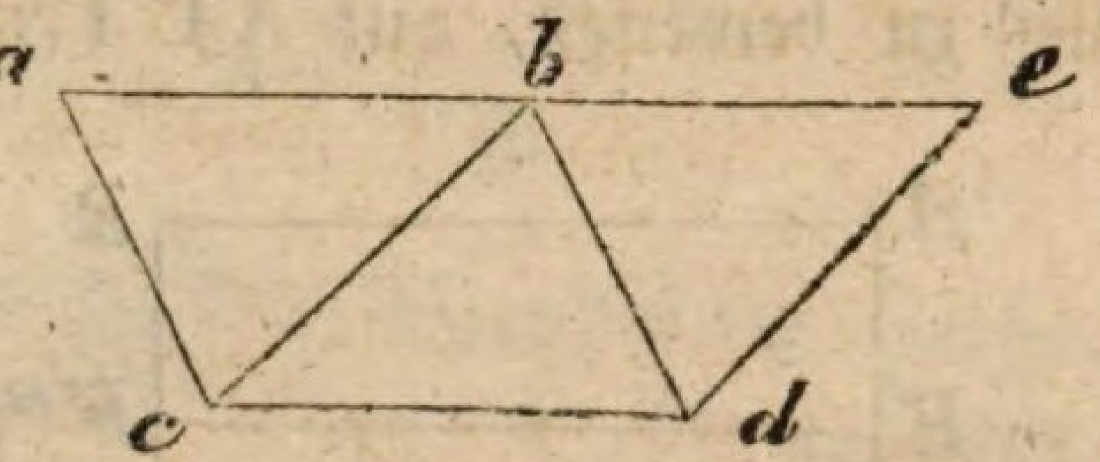
$abe \cong dcf$, also ist auch $\triangle\, abe + edcb = \triangle\, dcf + edcb$ oder $ac = ec$. Eben so zeigt sich auch die Gleichheit der Parallelogramme ac und ef (Fig. 48.); es ist nämlich das $\triangle\, ade \cong \triangle\, bcf$,

Fig. 48.



also $\triangle\, ade - \triangle\, boe = \triangle\, bcf - \triangle\, boe$ oder $abod = eocf$, somit auch $abod + \triangle\, doc = eocf + \triangle\, doc$, daher $ac = ec$. Noch einfacher ist der Beweis, wenn die Parallelogramme die Lage (Fig. 49.) haben; man findet nämlich $\triangle\, abc \cong \triangle\, bde$

Fig. 49.



somit $\triangle\, abc + \triangle\, bcd = \triangle\, bde + \triangle\, bcd$ oder $ad = ec$. Zwei Parallelogramme, die gleiche Grundseiten und Höhen haben, sind also gleich.

2) Jedes Parallelogramm ist daher einem Rechtecke gleich, welches mit demselben gleiche Grundseite und Höhe hat; daher der Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes gefunden wird, wenn man die Grundseite mit der Höhe multiplicirt, nur muß man, im Falle es kein Rechteck ist, auf die als Basis betrachtete Seite eine Senkrechte ziehen, um die Höhe desselben zu erhalten.

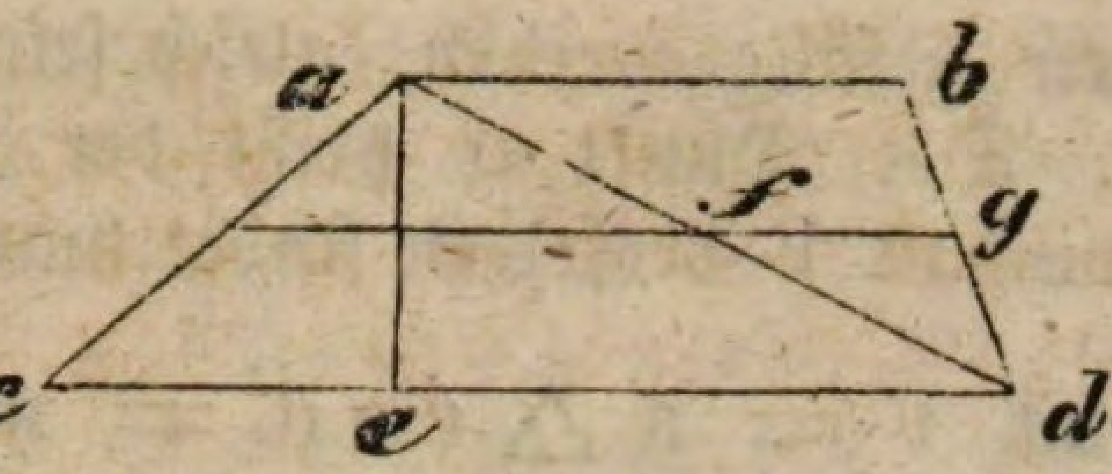
3) Sind B und b die Grundseiten, H und h die Höhen, endlich F und f die Flächeninhalte zweier Parallelogramme, so hat man $F : f = B . H : b . h$. Zwei Parallelogramme stehen also im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundseiten und Höhen. Wird $B = b$, so ergibt sich $F : f = H : h$; sind also die Grundseiten gleich, so verhalten sie sich wie ihre Höhen, und eben so folgt, daß bei gleichen Höhen sie sich wie ihre Grundseiten verhalten. Ist endlich $F = f$, also $B . H = b . h$, so zeigt sich $B : b = h : H$, daher in gleichen Parallelogrammen die Grundseiten den Höhen verkehrt proportionirt sind.

§. 29. **Berechnung des Dreiecks und Trapezes.**

1) Da jedes Parallelogramm durch die Diagonale halbirt wird, so ist auch jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogrammes, welches dieselbe Grundseite und Höhe hat; bezeichnet nun b die Basis und h die Höhe eines Dreiecks; so ergibt sich für den Flächeninhalt desselben $\frac{b . h}{2}$, woraus folgt, daß auch zwei Dreiecke, die gleiche Grundseiten und Höhen haben, gleich sein müssen. Die früher §. 28. 3. entwickelten Verhältnisse finden offenbar auch für Dreiecke statt.

2) Eine vierseitige Figur $abdc$, in welcher nur zwei Seiten parallel sind (Fig. 50.), heißt Trapez. Um den Flächeninhalt desselben

Fig. 50.



zu berechnen, ziehe man eine Diagonale a d und a e $\perp$ c d, so ergibt sich

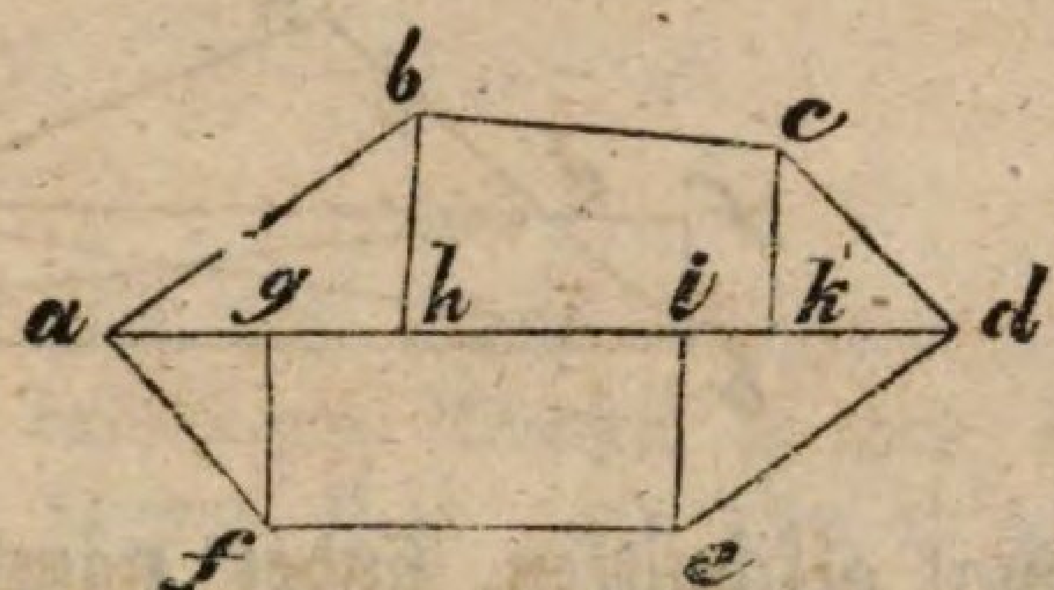
$$a\,b\,d\,c = \triangle\, a\,c\,d + \triangle\, a\,b\,d = \frac{cd\,.\,ae}{2} + \frac{ab\,.\,ae}{2} = (c\,d + a\,b)\,\frac{a\,e}{2}$$

Es wird also der Flächeninhalt eines Trapezes gefunden, wenn man die Summe der parallelen Seiten mit ihrem halben Abstand multiplizirt.

§. 30. **Berechnung des Polygons überhaupt und des regulären insbesondere.**

1) Hat man den Flächeninhalt eines Polygons a b c d e f (Fig. 51.) zu berechnen, so besteht die zweckmäßigste Methode darin, die

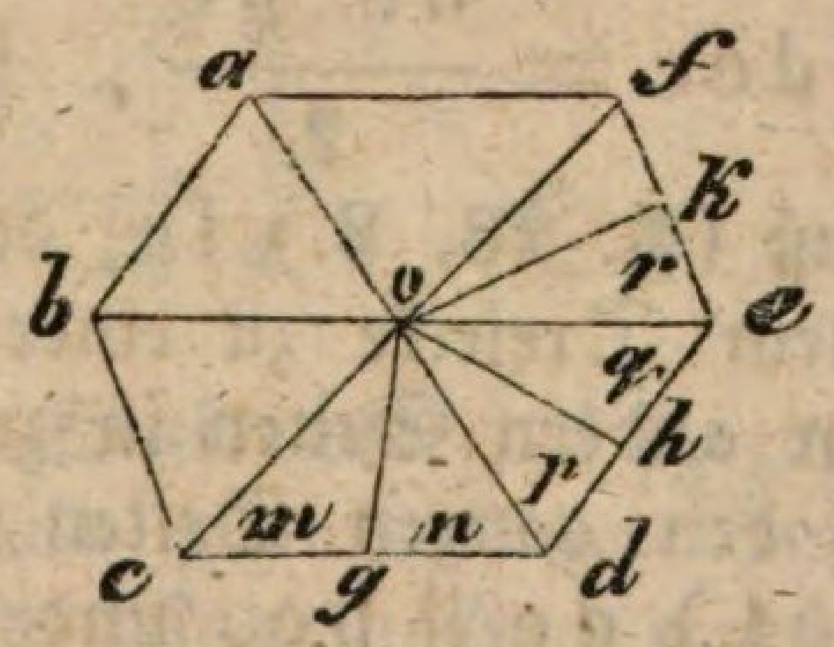
Fig. 51.



längste Diagonale a d zu ziehen, und auf diese von den Scheiteln der Polygonwinkel Senkrechte zu fällen, wodurch sich lauter Dreiecke und Trapeze ergeben, welche nach dem Vorhergehenden berechnet werden können, und deren Summe den gesuchten Flächeninhalt gibt.

2) Es sei der Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons a b c d e f (Fig. 52.) zu berechnen. Halbirt man die Winkel c und d, so ist das

Fig. 52.



entstandene $\triangle$ o c d wegen W. m = n gleichschenklig, und wird o mit e verbunden, so muß, weil c d = d e, o d = o d und W. n = p ist, das $\triangle$ c o d $\cong$ $\triangle$ e o d, also auch das letztere gleichschenklig sein, somit ist p = q, und wegen W. $p = \frac{d}{2} = \frac{e}{2}$, auch W. $q = \frac{e}{2} = r$ sein. Wird nun die Gerade o f gezogen, so ist daher das $\triangle$ o f e $\cong$ o d e und ebenfalls gleichschenklig. Auf diese Art überzeugt man sich, daß auch alle andern Dreiecke, welche durch Verbindung der Scheitel der übrigen Polygonwinkel mit o entstehen, kongruent und gleichschenklig sein müssen, wenn das Polygon noch so viele Seiten hat. Aus diesem Grunde müssen auch die Senkrechten o g, o h, o k, welche von o auf

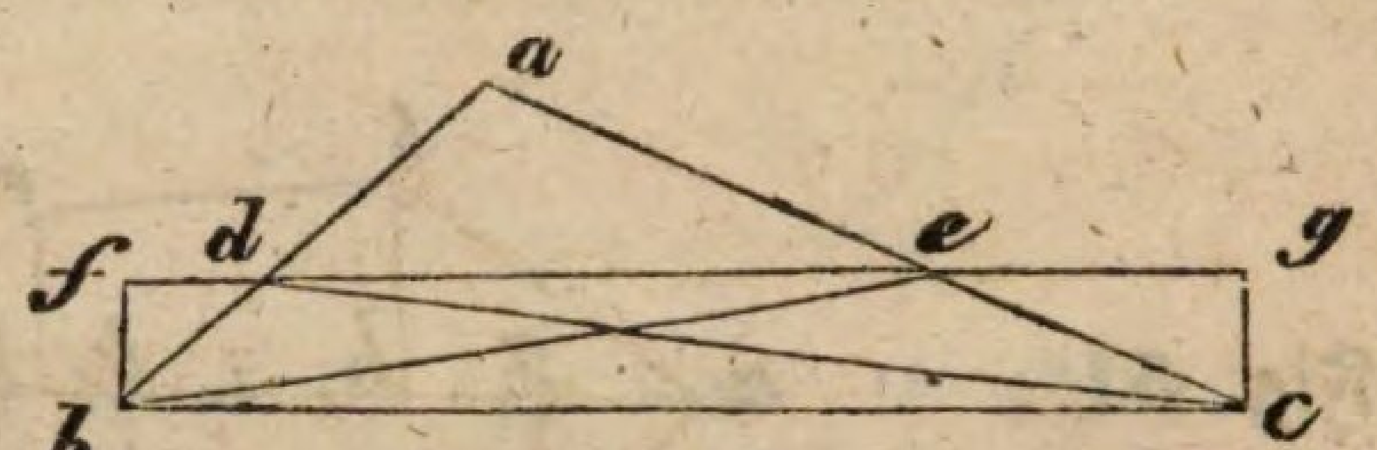
die Polygonseiten gefällt werden, gleich sein, und nach §. 17. 4. diese Seiten halbiren. Der Punkt o heißt der Mittelpunkt des Polygons. Für den Flächeninhalt F desselben findet man demnach, wenn es nseitig ist, den Ausdruck $F = n \triangle cod = n \cdot cd \cdot \frac{og}{2}$ Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons wird also gefunden, wenn man den Umfang n.cd desselben mit der halben Senkrechten og, welche vom Mittelpunkte auf eine Seite gezogen ist, multiplizirt.

V. Proportional-Linien und Aehnlichkeit der Figuren.

§. 31. Vom proportionalen Schnitt im Dreiecke.

1) Werden in einem Dreiecke (Fig. 53.) zwei Seiten durch eine

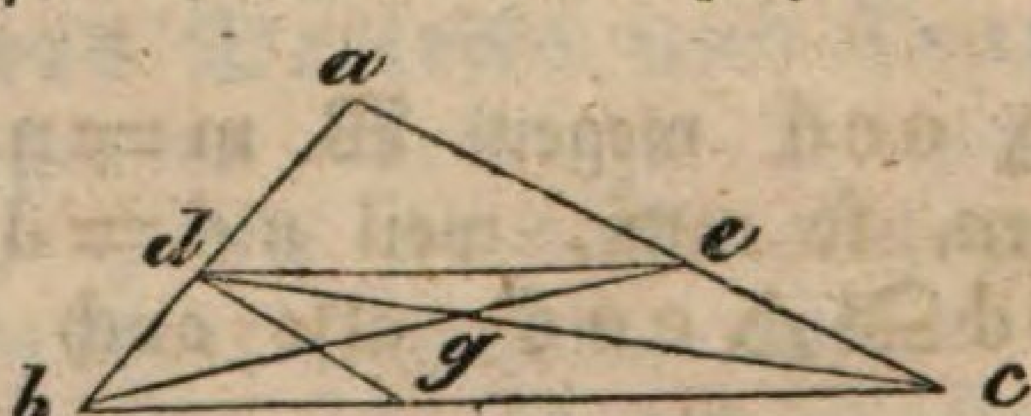
Fig. 53.



Gerade proportional geschnitten, findet nämlich die Gleichung $ad : bd = ae : ec$ statt, so muß $de \parallel bc$ sein. Man ziehe die Geraden dc und be, betrachte ad und bd als Grundseiten der Dreiecke ade und bde, so haben sie gleiche Höhen, und es ergibt sich nach §. 29. 1. $\triangle ade : \triangle bde = ad : bd$. Auf gleiche Weise findet man auch $\triangle ade : \triangle dec = ae : ec$, daher folgt vermöge der Voraussetzung $\triangle ade : \triangle bde = \triangle ade : \triangle dec$, also $\triangle bde = \triangle dec$. Ist nun $bf \perp de$ und $cg \perp de$, so wird $\triangle bde = \frac{de \cdot bf}{2}$ und $\triangle dec = \frac{de \cdot gc}{2}$, somit $bf = gc$. Da nun $bf \# gc$ ist, so muß (§. 23. 2.) fg, daher auch $de \parallel dc$ sein.

2) Die in einem Dreiecke zu einer Seite parallel gezogene Gerade theilt die beiden andern Seiten in zwei Segmente, welche sowohl unter sich, als auch den ganzen Seiten proportionirt sind. Um dieß zu beweisen, sei (Fig. 54.) $de \parallel bc$, und man ziehe noch die Geraden

Fig. 54.



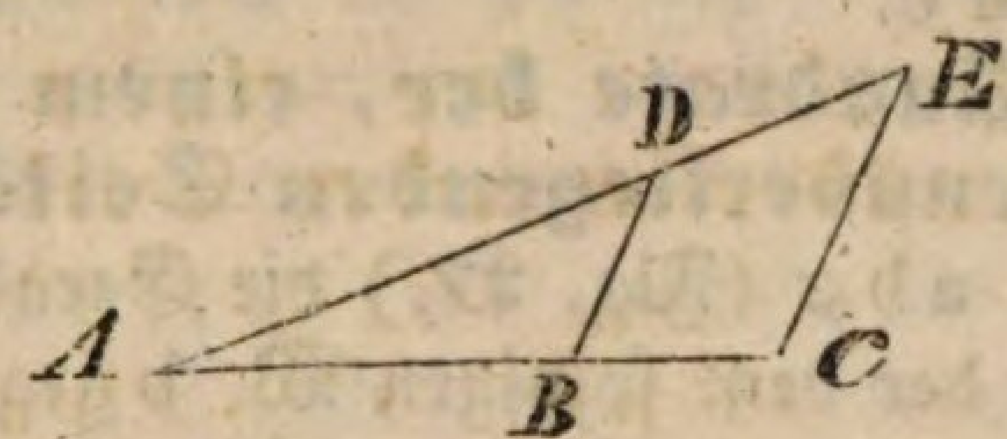
be und dc. Werden in den Dreiecken ade und bde die Seiten ad und bd als Grundseiten betrachtet, so haben sie dieselbe Höhe, also $\triangle ade : \triangle bde = ad : bd$. Allein dasselbe gilt auch von den Dreiecken ade und edc, wenn d als gemeinschaftliche Spitze betrachtet wird, folglich $\triangle ade : \triangle edc = ae : ec$. Die Dreiecke

b d e und e d c haben aber die Seite d e gemeinschaftlich, und liegen zwischen denselben Parallelen d e und b c, weßhalb ihnen auch dieselbe Höhe zukommt, und sind also gleich. Daher ergibt sich aus den beiden aufgestellten Proportionen a d : b d = a e : e c. Hieraus folgt a d : a d + b d = a e : a e + e c oder 2) a d : a b = a e : a c, und auf ähnliche Art auch 3) b d : a b = e c : a c.

3) Wird in einem Dreiecke a b c zu einer Seite b c eine Parallele d e gezogen, so sind die Seiten des kleinern Dreieckes a d e jenen des größern a b c proportionirt. Nach 2) ergibt sich a d : a b = a e : a c, ist nun d g || a c, so folgt a d : a b = g c : b c; allein es ist nach §. 23, 1. g c = d e, also hat man a d : a b = d e : b c = a e : a c.

4) Ist zu drei Geraden a, b und c (Fig. 55.) die vierte Pro-

Fig. 55.

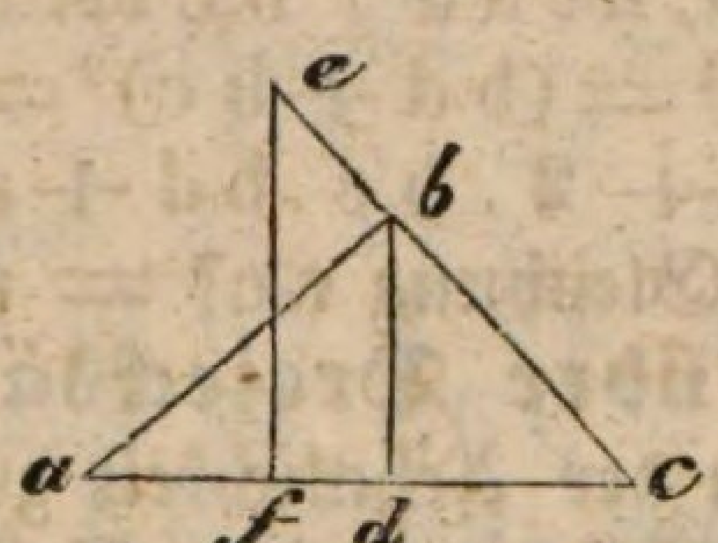


portional-Linie zu finden, so läßt sich diese Aufgabe auf folgende Art auflösen. Man zeichne einen beliebigen Winkel A und mache A B = a, B C = b, A D = c, ziehe ferner B D und von C aus C E || B D, so ist D E die gesuchte Gerade; denn man hat A B : B C = A D : D E oder a : b = c : D E. Ist in dieser Aufgabe b = c, so heißt D E die dritte stetige Proportionale.

§. 32. Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks.

1) Wird vom Scheitel b des rechten Winkels a b c (Fig. 56.)

Fig. 56.



auf die Hypothenuse a c eine Senkrechte b d gezogen, so ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypothenuse und dem anliegenden Segmente derselben. Man mache e c = a c und f c = b c, so ist nach §. 10, 2. △ a b c ≅ △ e f c, also W. e f c = a b c = R, daher e f || b d, folglich e c : f c = b c : d c oder a c : b c = b c : d c. Eben so findet man auch a c : a b = a b : a d.

2) Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. Die eben erwiesenen Proportionen geben die Gleichungen:

$bc^2 = ac \cdot dc$ und $ab^2 = ac \cdot ad$ und durch Addition derselben findet man

$ab^2 + bc^2 = ac \cdot ad + ac \cdot dc = ac\,(ad + dc) = ac \cdot ac = ac^2$. Dieser Lehrsatz wird gewöhnlich der pythagorische genannt.

3) Ist in einem △ A B C (Fig. 26.) das Quadrat der größten Seite AC^2 gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten $AB^2 + BC^2$,

so ist der jener größten Seite gegenüberliegende W. $ABC = R$. Es sei $BD \perp AB$ und $BD = BC$, hierauf AD gezogen; so folgt aus dem rechtwinkligen $\triangle$ ABD die Gleichung $AD^2 = AB^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2$; es ist aber auch $AC^2 = AB^2 + BC^2$, daher $AD^2 = AC^2$, somit $AD = AC$. Da nun $AD = AC$, $BD = BC$ und $AB = AB$ ist, so ist $\triangle ABD \cong ABC$, folglich W. $ABD = ABC = R$.

4) Jene Senkrechte bd ist die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten der Hypothenuse, nämlich $ad : bd = bd : dc$. Mittelst des pythagorischen Lehrsatzes findet man $bd^2 = bc^2 - dc^2$, aber nach dem Vorhergehenden ist $bc^2 = ac \cdot dc$, folglich ergibt sich durch Substitution:

$bd^2 = ac \cdot dc - dc^2 = dc\,(ac - dc) = dc \cdot ad$, oder $ad : bd = bd : dc$.

§. 33. **Vom Quadrate der, einem spitzigen oder stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite.**

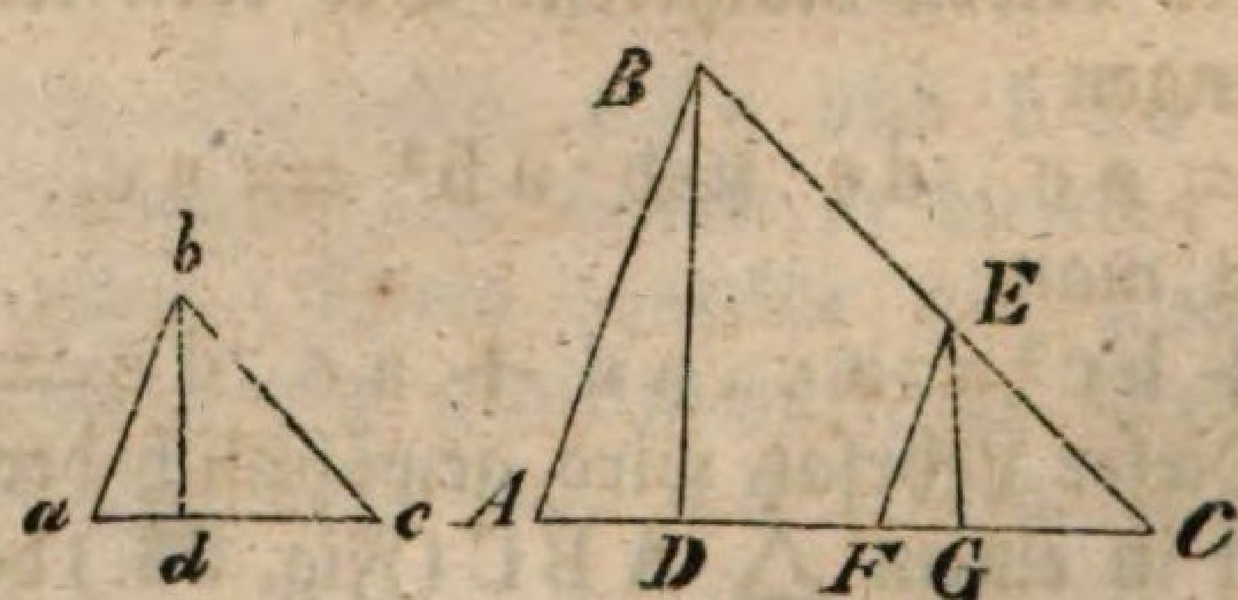
1) Wird im $\triangle$ abc (Fig. 27.) die Gerade $ad \perp bc$ errichtet, so findet für das Quadrat der dem spitzigen W. b gegenüberliegenden Seite ac folgende Gleichung statt: $ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2 \cdot bc \cdot bd$. Aus dem $\triangle$ adc findet man $ac^2 = dc^2 + ad^2$; aber es ist $dc^2 = (bc - bd)^2 = bc^2 + bd^2 - 2 \cdot bc \cdot bd$, folglich wird $ac^2 = bc^2 + bd^2 - 2 \cdot bc \cdot bd + ad^2$, und wenn man ab^2 statt $bd^2 + ad^2$ substituirt, $ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2 \cdot bc \cdot bd$. Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn jene Senkrechte ad außerhalb des Dreieckes fällt

2) Für das Quadrat der dem stumpfen Winkel abc (Fig. 22.) gegenüberliegenden Seite ac aber findet man den Ausdruck $ac^2 = ab^2 + bc^2 + 2 \cdot bc \cdot bd$, wo $ad \perp bc$ vorausgesetzt wird. Es ist nämlich $ac^2 = dc^2 + ad^2$ und $dc^2 = (bd + bc)^2 = bd^2 + bc^2 + 2 \cdot bc \cdot bd$, also $ac^2 = bd^2 + bc^2 + 2 \cdot bc \cdot bd + ad^2$, und hieraus folgt wegen $bd^2 + ad^2 = ab^2$ die Gleichung $ac^2 = ab^2 + bc^2 + 2 \cdot bc \cdot bd$.

§. 34. **Lehrsätze über Dreiecksähnlichkeit.** Dem früher §. 9 aufgestellten Begriffe der Aehnlichkeit gemäß, müssen zwei Dreiecke ähnlich sein, wenn sie sich bloß durch ihre Größe unterscheiden, sonst aber genau dieselbe Beschaffenheit besitzen. Zwei Dreiecke sind also auch ähnlich, wenn sie so beschaffen sind, daß durch Hinzufügung des Merkmals der Gleichheit ihre Kongruenz hervorgeht. Dieß ist aber der Fall, wenn zwei Dreiecke 1) alle Seiten proportionirt, oder 2) zwei Seiten proportionirt, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, oder endlich 3) zwei Seiten proportionirt, und den der größern Seite gegenüberliegenden Winkel gleich haben; was wir nun beweisen wollen.

1) In den Dreiecken ABC und abc (Fig. 57.) verhalte sich $AB : ab$

Fig. 57.



$= BC : bc = AC : ac$, ferner wollen wir noch das Merkmahl der Gleichheit hinzufügen, demnach $BD \perp AC$, $bd \perp ac$ ziehen und vermöge §. 29. 1. die Proportion $BD : bd = ac : AC$ voraussetzen. Nun sei $EC = bc$, $EG \perp AC$, daher $EG \parallel BD$, somit folgt aus den Dreiecken BDC und EGC nach §. 31., 3. $BC : EC = BC : bc = BD : EG$; allein aus unsern Voraussetzungen ergibt sich auch $BC : bc = AC : ac = bd : BD$, daher hat man $BD : EG = bd : BD$, also $BD^2 = EG \cdot bd$. Wird nun $FC = ac$ gemächt, so gibt die Proportion $BC : bc = AC : ac$ folgende $BC : EC = AC : FC$, es muß also nach §. 31,1. $EF \parallel AB$ sein, und hieraus folgt vermöge §. 31. 3. $BC : EC = BC : bc = AB : EF$; allein man hat auch $BC : bc = AB : ab$, daher muß $EF = ab$, also das $\triangle\ EFC \cong abc$ und $EG = bd$ sein, somit ist $BD^2 = bd^2$, folglich $BD = bd$; daher $AC = ac$, $AB = ab$ und $BC = bc$, demnach das $\triangle\ ABC \cong abc$.

2) Wird die Proportion $AC : ac = BC : bc$ und der W. $C = c$ angenommen, ferner $BD \perp AC$ und $bd \perp ac$ errichtet, und die Gleichung $BD : bd = ac : AC$ vorausgesetzt, so folgt, wenn $EC = bc$ und $EG \perp AC$ ist, genau wie früher der Ausdruck $BD^2 = EG \cdot bd$. Nun ist aber wegen $EC = bc$ und W. $C = c$ nach §. 19, 3. das $\triangle\ EGC \cong bdc$, also $EG = bd$, daher $BD^2 = bd^2$, demnach $BD = bd$, folglich $AC = ac$, $BC = bc$, und da auch W. $C = c$ ist, so muß $\triangle\ ABC \cong abc$ sein.

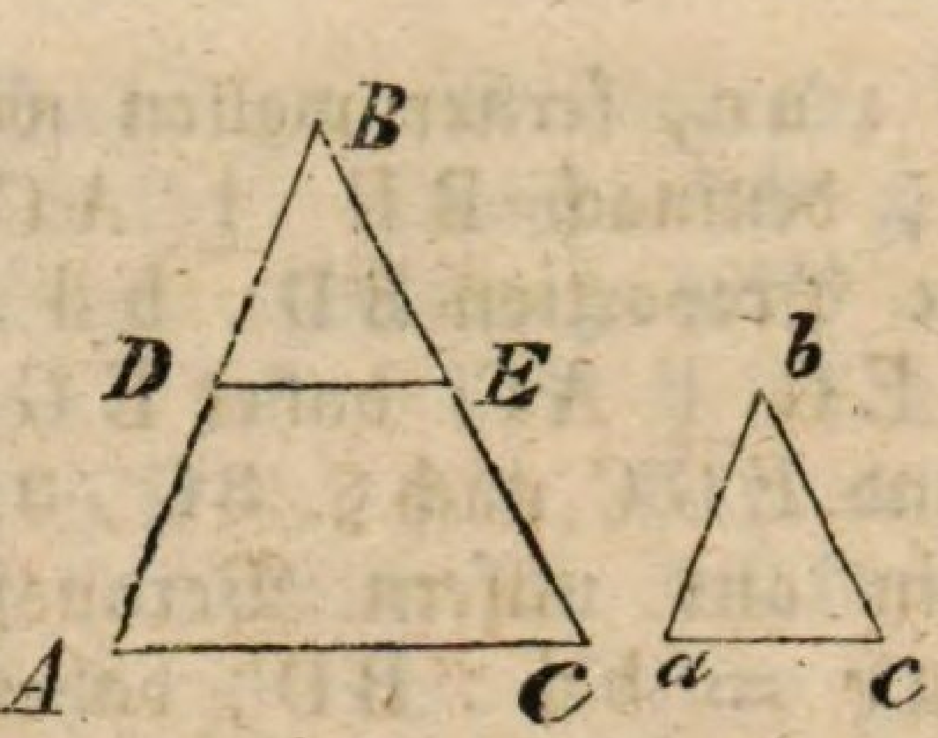
3) Wir wollen die Proportion $AC : ac = BC : bc$, in welcher $BC > AC$, daher auch $bc > ac$ sei, dann W. $A = a$ annehmen; ferner sei $BD \perp AC$, $bd \perp ac$, $EC = bc$ und $EG \perp AC$, so folgt, wenn noch die Gleichung $BD : bd = ac : AC$ vorausgesetzt wird, wie in (1) $BD^2 = EG \cdot bd$. Nun sei $FC = ac$, so folgt wegen $EC = bc$ aus $AC : ac = BC : bc$ die Proportion $AC : FC = BC : EC$, also ist $EF \parallel AB$, daher W. $A =$ W. EFC, somit, da W. $A = a$ ist, auch W $EFC = a$, folglich nach §. 20. 1. das $\triangle\ EFC \cong abc$ und $EG = bd$, weßhalb $BD^2 = bd^2$, also $BD = bd$, daher $AC = ac$ und $BC = bc$ sein muß, da aber auch W. $A = a$ ist, so ist das $\triangle\ ABC \cong abc$.

Unter den oben genannten drei Voraussetzungen haben also zwei Dreiecke die Beschaffenheit, daß durch Hinzufügung des Merkmals der Gleichheit ihre Kongruenz entsteht; also müssen sie unter jenen Bedingungen ähnlich sein. Auch ist aus den aufgestellten Entwicklungen klar, daß die in ähnlichen Dreiecken proportionirten Seiten gegenüberliegenden Winkel A und a, B und b, C und c gleich sein müssen. Diese Winkel werden homologe genannt, so wie auch die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homologe heißen.

§. 35. Fernere Lehrsätze über Dreiecksähnlichkeit.

1) Wird in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele gezogen, so ist das kleinere Dreieck dem größeren ähnlich; denn es sei $DE \parallel AC$ (Fig. 58.), so folgt nach §. 31, 3 $AB : BD = AC : DE = BC : BE$, somit ist nach §. 34. 1. das $\triangle\ ABC \sim \triangle\ BDE$.

Fig. 58.



2) Haben zwei Dreiecke zwei Winkel wechselweise gleich so sind sie ähnlich. Wird W. B = b und W. C = c vorausgesetzt, so mache man BD = ab, BE = bc und ziehe DE, so muß △ BDE ≅ abc, daher W. BED = c sein. Da aber auch W. c = C ist, so hat man W. BED = C, demnach DE ∥ AC, also △ ABC ∼ △ BDE ∼ △ abc. Da DE ∥ AC ist, so folgt nach §. 31, 3. AB : BD = AC : DE = BC : BE oder AB : ab = AC : ac = BC : bc, d. h.

3) In ähnlichen Dreiecken liegen gleichen Winkeln proportionirte Seiten gegenüber, oder die homologen Seiten sind proportionirt.

4) Sind die Seiten eines Dreiecks jenen eines andern parallel, oder die Seiten des einen auf jenen des andern senkrecht, so sind nach § 25. die Winkel beider Dreiecke wechselweise gleich, daher die Dreiecke ähnlich; auch ist einleuchtend, daß im ersten Falle die parallelen, im zweiten aber die senkrechten Seiten homolog sind.

5) Hat man ein Dreieck zu konstruiren, welches einem gegebenen ABC ähnlich sei, und dessen mit AC homologe Seite die Länge ac haben soll; so mache man W. a = A und W. c = C und verlängere die Schenkel, bis sie sich in b schneiden, so ist △ abc ∼ △ ABC.

§. 36. Aehnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke.

1) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen Winkel an der Hypothenuse wechselweise gleich haben; wie aus §. 35. 2. hervorgeht.

2) Wenn die Hypothenuse und eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes auf der Hypothenuse und einer Kathete eines andern senkrecht stehen, so sind beide Dreiecke ähnlich; denn in diesem Falle haben sie nebst dem rechten Winkel auch noch jene Winkel wechselweise gleich, deren Schenkel aufeinander senkrecht stehen. Aus demselben Grunde müssen auch zwei rechtwinklige Dreiecke ähnlich sein, wenn die Hypothenuse und eine Kathete des einen auf einer Kathete und der Hypothenuse des andern senkrecht sind.

3) Wenn die Hypothenuse und eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks auf zwei Seiten eines Dreiecks senkrecht stehen, und die dritte Seite des letztern der Hypothenuse des erstern parallel ist; so müssen beide Dreiecke ähnlich und daher auch das letztere rechtwinklig sein. Es sei (Fig. 59.) W. H = R, CM ⊥ DM, HM ⊥ ME und DE ∥ CM, so ist W. CMH

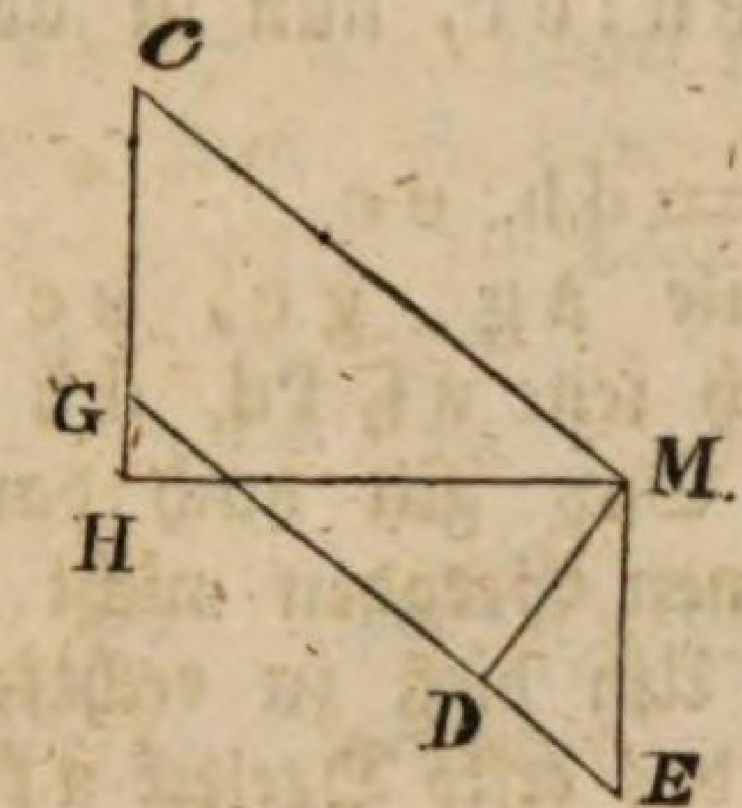


Fig. 59.

= DME, und wenn DE bis G verlängert wird, auch W. C = W. HGD; nun sind aber CH und ME ⊥ MH, folglich ist CH ∥ ME, daher W. HGD = E, also W. E = C, somit auch W. H = W. MDE = R, und das △HCM ∾ △DEM.

§. 37. Eigenschaften ähnlicher Dreiecke.

1) Die in ähnlichen Dreiecken (Fig. 57.) ABC und abc aus den Scheiteln homologer Winkel B und b auf die Gegenseiten AC und ac gezogenen Senkrechten BD und bd wollen wir homologe Höhen heißen, und nun beweisen, daß sie den homologen Seiten proportionirt sind. Vermöge der Voraussetzung ist nämlich △ABC ∾ △abc, also W. A = a, und da auch W. ADB = adb = R ist, so folgt △ABD ∾ △abd, also BD : bd = AB : ab.

2) Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke stehen im quadratischen Verhältnisse ihrer homologen Seiten. Lassen wir die vorhergehenden Voraussetzungen auch hier gelten, so ergibt sich AC : ac = AB : ab, aber es verhält sich auch BD : bd = AB : ab; somit findet man durch Zusammensetzung beider Proportionen $AC.BD : ac.bd = AB^2 : ab^2$, daher auch $\frac{AC.BD}{2} : \frac{ac.bd}{2} = \triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2$.

Aus 1. und 2. folgt endlich:

3) Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der homologen Höhen.

§. 38. Verhältnißmäßige Theilung gerader Linien.

1) Werden zwei Gerade ab und ac (Fig. 60.) von mehreren Pa-

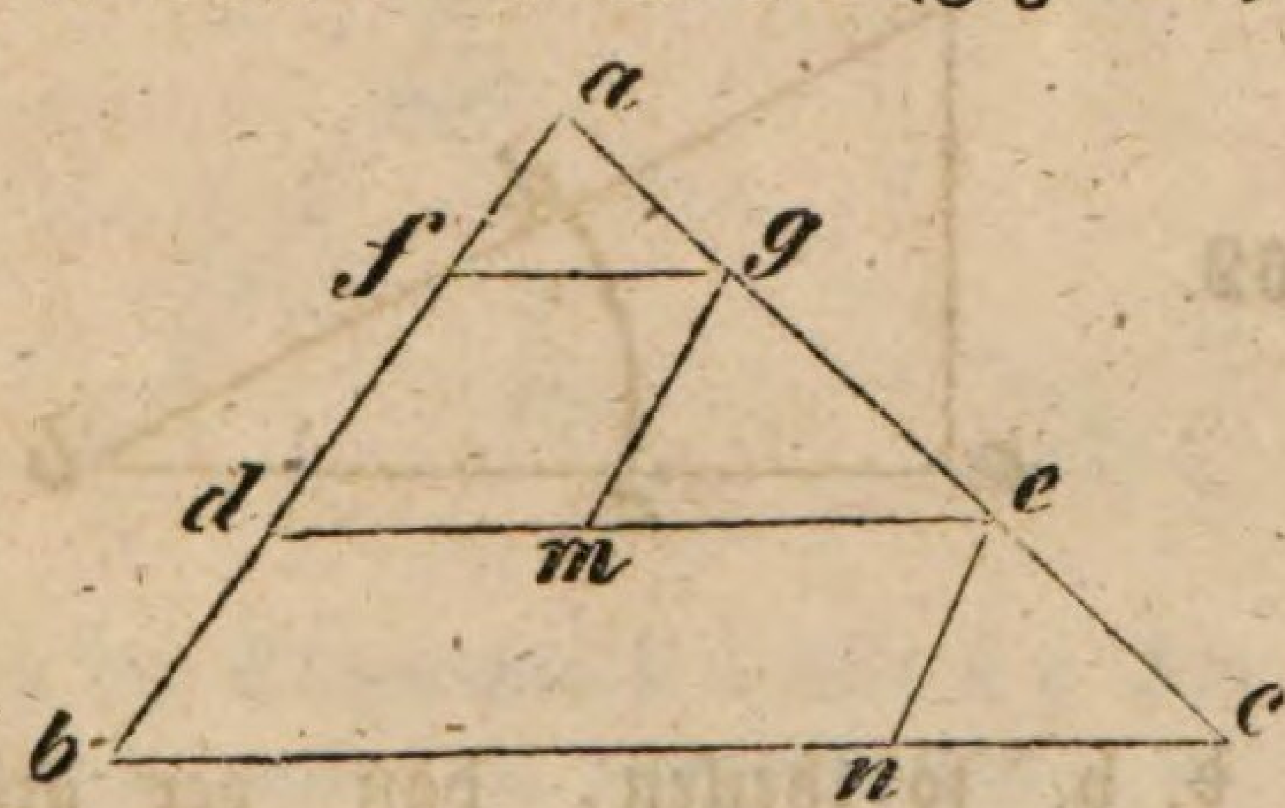


Fig. 60.

rallelen bc, de, fg geschnitten, so sind die dadurch entstehenden Theile proportionirt, es verhält sich nämlich af : ag = fd : ge = db : ec. Um dieß zu beweisen, ziehe man gm und en ∥ ab, so zeigt sich W. fag = W. mge = W. nec, ferner ist W. fga = W. meg = W. nce; daher △fag ∾ △mge ∾ △nec, also verhält sich

af : ag = mg : ge = en : ec, nun ist aber gm = fd und en = db, demnach hat man

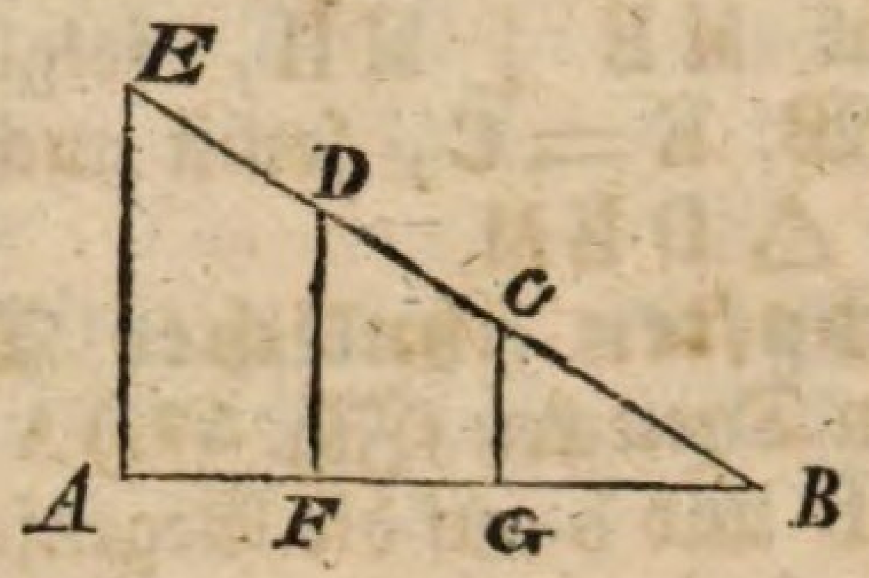
af : ag = fd : ge = db : ec.

2) Sind die Theile ag, ge, ec auf der einen Geraden ac gleich, so müssen es auch jene af, fd, db auf der andern ab sein.

3) Der erwiesene Satz gilt auch dann, wenn jene beiden durch die Parallelen geschnittenen Geraden nicht von einem gemeinschaftlichen Punkte a gezogen sind. Um dieß zu rechtfertigen, braucht man nur im vorhergehenden Beweise das erste Dreieck afg wegzulassen.

4) Nun läßt sich das Problem, eine Gerade AB (Fig. 61.) in

Fig. 61.



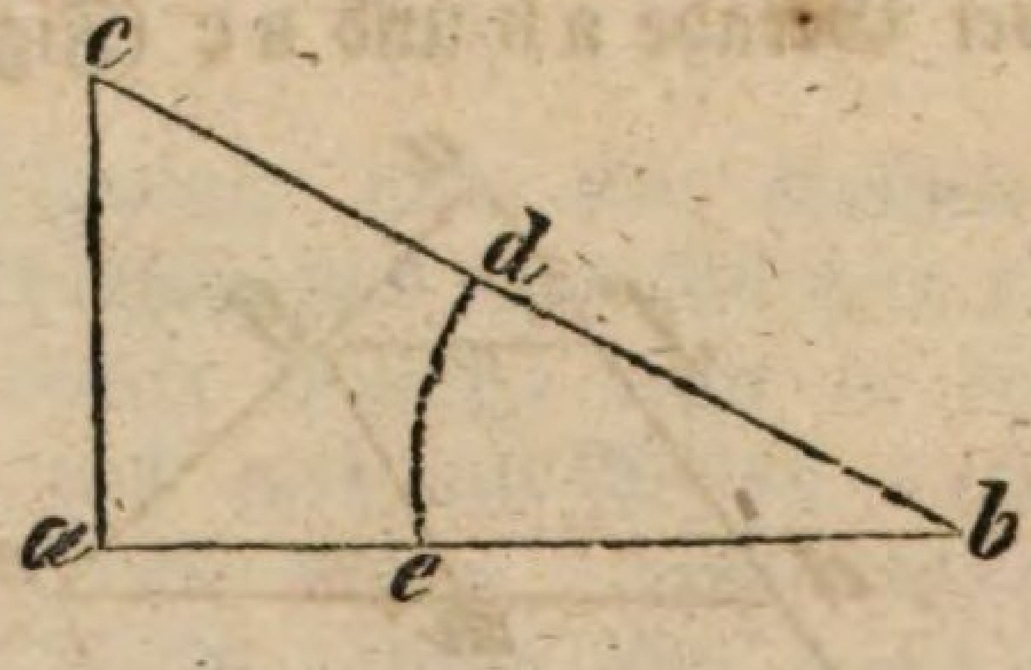
verhältnißmäßige Theile zu theilen, leicht auflösen. Man ziehe nämlich von B unter beliebiger Neigung eine Gerade, und wenn das Verhältniß, nach welchem die Theilung geschehen soll, in Linien a, b, c gegeben ist, so trage man dieselben von B aus auf, so daß BC = a, CD = b und DE = c sei, verbinde A mit E, und ziehe hierauf von D und C zu AE die Parallelen DF und CG; so hat man dem oben erwiesenen Satze gemäß BG : GF : FA = BC : CD : DE = a : b : c.

Bezeichnen aber die Größen a, b und c Zahlen, so muß man eine beliebige Länge auf BE so oft auftragen, als diese es anzeigen, und dann auf die vorige Art verfahren.

5) Hat man eine Gerade in gleiche Theile zu theilen, so läßt sich dieß nach 4. leicht ausführen; denn in diesem Falle ist nur a = b = c anzunehmen.

§. 39. **Theilung nach dem äußeren und mittleren Verhältnisse.** Eine Gerade ab (Fig 62.) nach dem äußern und mittleren Verhältnisse, d. h. so theilen, daß der größere Abschnitt die

Fig. 62.

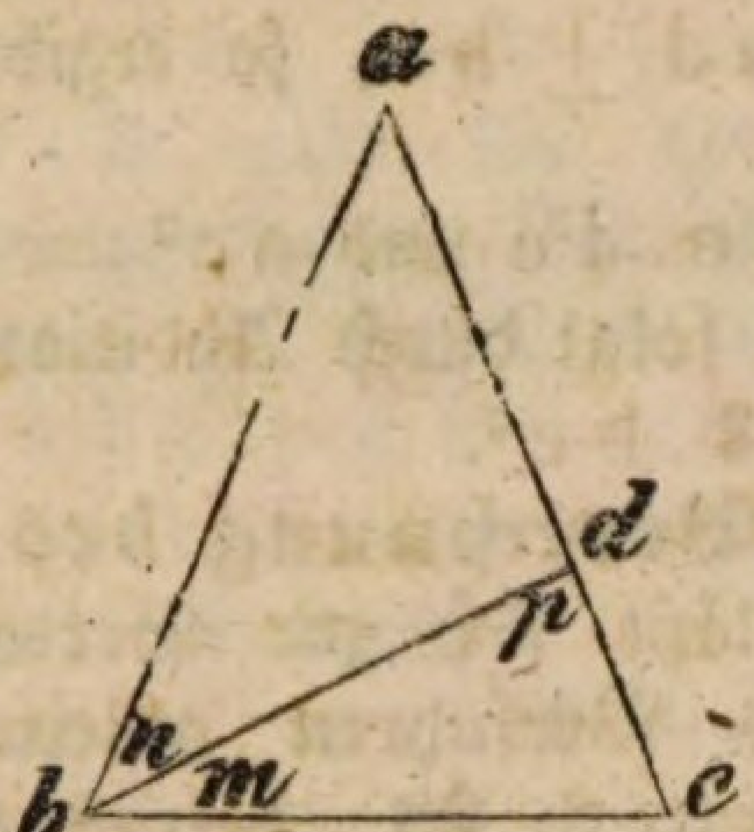


mittlere Proportionale zwischen dem kleinern und der ganzen Geraden sei. Man errichte auf ab die Senkrechte ac = $\frac{1}{2}$ ab, ziehe bc, mache cd = ac, und beschreibe von b als Centrum mit dem Radius bd den Bogen de, so ist be das größere Segment und ab : be = be : ae. Beweis. Da bc > ab ist, so ist auch bc — bd > ab — be oder

$cd > ae$, folglich auch $\frac{1}{2}ab > ae$, somit $be > ae$. Ferner findet man $bc^2 = ab^2 + ac^2$, nun ist aber $bc = bd + cd =$
$be + \frac{1}{2}ab$, also $(be + \frac{1}{2}ab)^2 = ab^2 + \frac{1}{4}ab^2$ oder
$be^2 + ab.be + \frac{1}{4}ab^2 = ab^2 + \frac{1}{4}ab^2$, folglich auch
$be^2 = ab^2 - ab.be = ab(ab - be) = ab.ae$, daher
$ab : be = be : ae$.

§. 40. **Anwendung auf das gleichschenklige Dreieck.** Ist die Basis (Fig. 63.) bc eines gleichschenkligen Dreiecks abc gleich

Fig. 63.

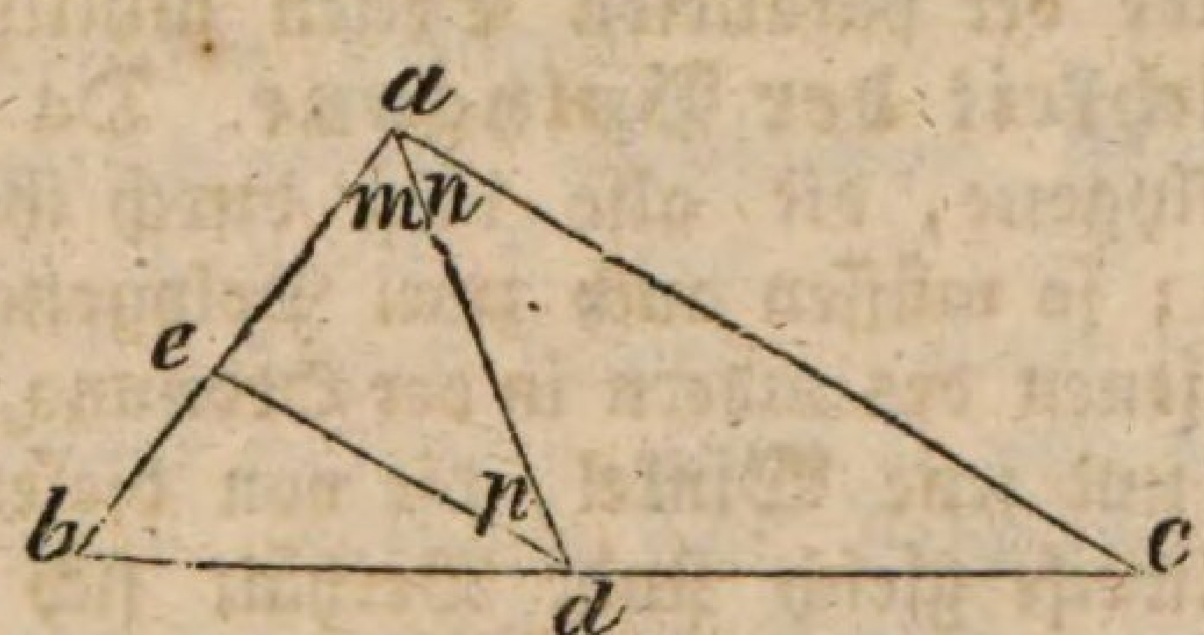


dem größern Segmente ad des nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilten Schenkels ac, so muß jeder Winkel an der Basis zweimal so groß sein, als jener an der Spitze. Da ad das größere Segment ist, so folgt $dc : ad = ad : ac$ oder $dc : bc = bc : ac$. Zieht man nun bd, so haben die Dreiecke bdc und abc den W. c gemeinschaftlich, und mit Berücksichtigung der letzten Proportion ergibt sich nach §. 34. 2. ihre Aehnlichkeit, daher W. $m = a$, und W. $p =$ W. abc ist; allein es ist auch W. $abc = c$, somit W. $p = c$, also $bc = bd = ad$, demnach W. $n = a$. Hieraus folgt W. $abc = m + n = 2a$.

§. 41. **Vom Dreiecke, in welchem ein Winkel oder eine Seite halbirt ist.**

1) Wird in einem Dreiecke abc (Fig. 64.) ein W. a halbirt

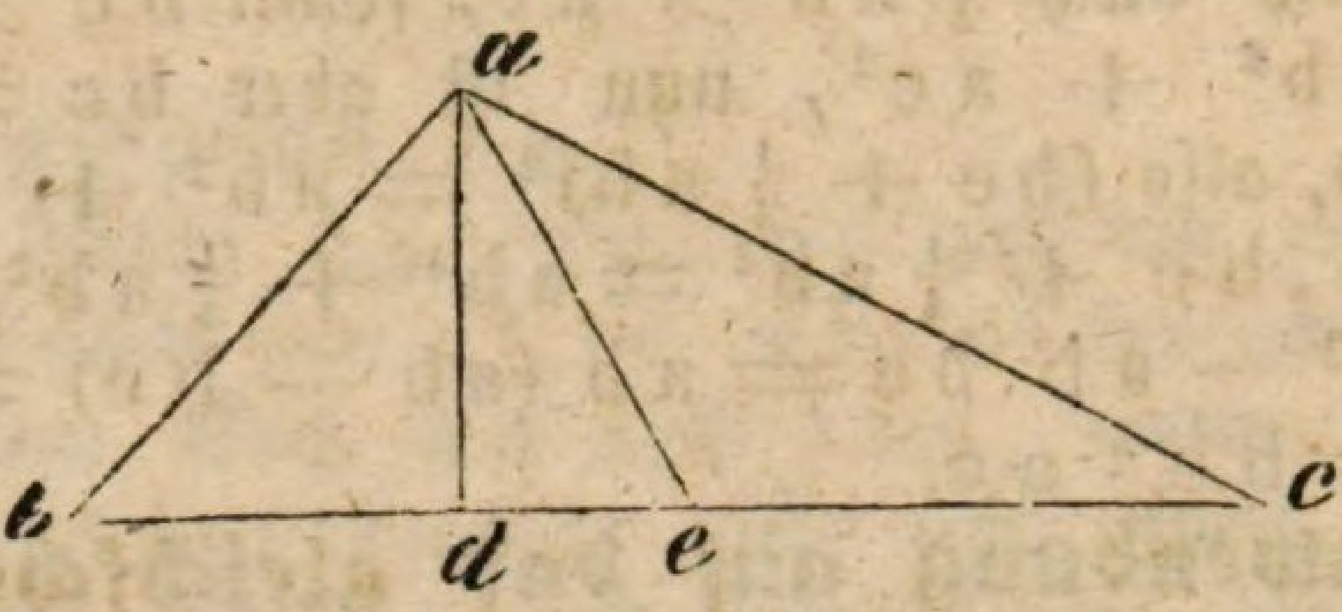
Fig. 64.



W. $m = n$, so sind die Segmente bd und dc der Gegenseite bc den anliegenden Seiten ab und ac proportionirt; es verhält sich nämlich $bd : dc = ab : ac$. Es sei $de \parallel ac$, so folgt $\triangle bde \sim abc$, also $ab : ac = be : de$. Nun ist aber W. $m = n$ und W. $n = p$, somit W. $m = p$, daher $ae = de$, demnach hat man vermöge §. 31. 3. $be : de = be : ae = bd : dc$, also $bd : dc = ab : ac$.

2) Wird eine Seite bc des Dreiecks abc (Fig. 65.) durch die vom Scheitel des Gegenwinkels a gezogene Gerade ae halbirt, so ist die

Fig. 65.



Summe der Quadrate der beiden andern Seiten a b und a c gleich der doppelten Summe der Quadrate der halben Seite b e und der halbirenden Geraden a e. Zieht man a d ⊥ b c, so ergibt sich nach §. 33. aus den Dreiecken a b e und a e c

$ab^2 = ae^2 + be^2 - 2 . be . de$ und $ac^2 = ae^2 + ec^2 + 2 . ec . de$.

Da nun b e = e c ist, so folgt durch Addition dieser beiden Gleichungen

$ab^2 + ac^2 = 2 . ae^2 + 2 . be^2$.

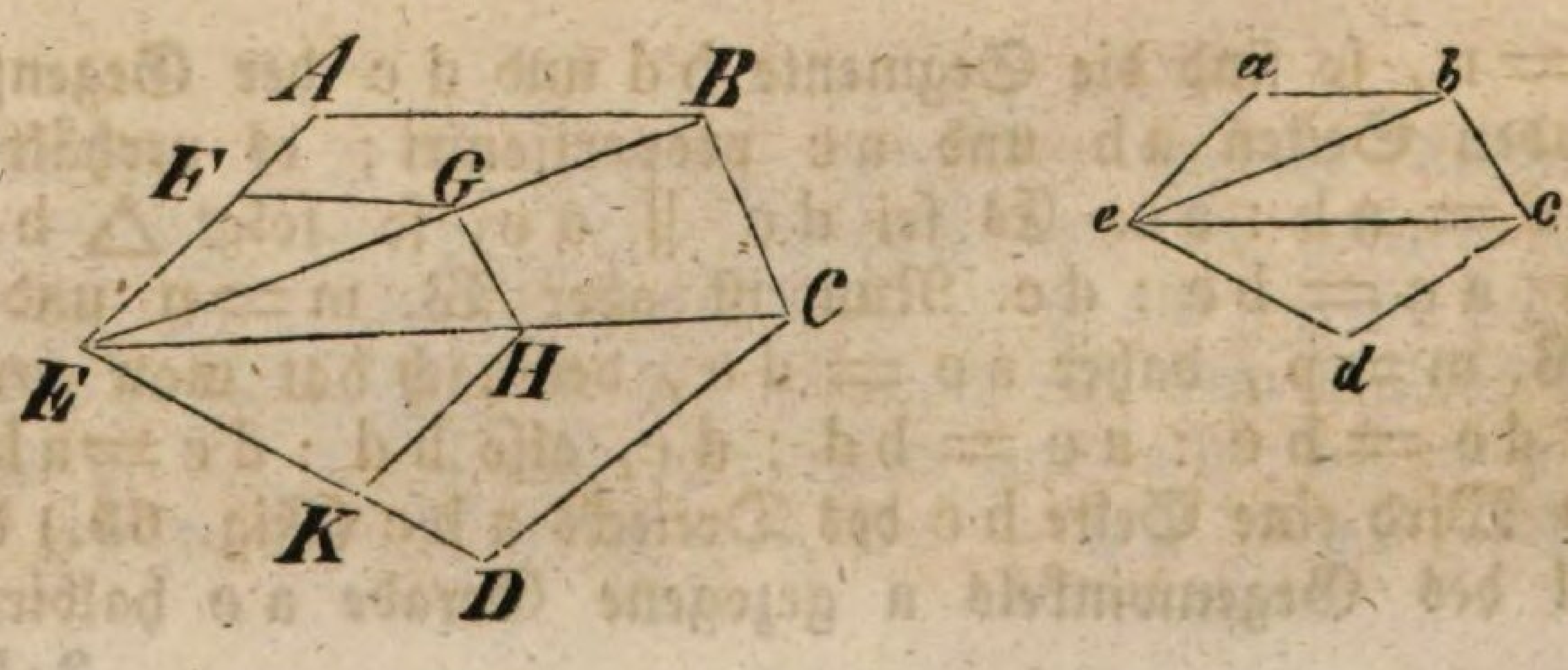
§. 42. **Regel zur Berechnung des Trapezes.** Mittelst der Aehnlichkeit der Dreiecke läßt sich zur Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes ein zweites Verfahren ableiten. Es sei o der Mittelpunkt der Seite a c des im §. 29. betrachteten Trapezes a b d c und durch o die Gerade o g ∥ a b gezogen, so ist offenbar $\triangle$ a o f $\sim$ $\triangle$ a c d, daher $ao : ac = of : cd = 1 : 2$, folglich $of = \frac{cd}{2}$

Eben so zeigt sich auch $af = \frac{ad}{2}$ und aus den ähnlichen Dreiecken f d g und a d b, daß $fg = \frac{ab}{2}$; daher wird $of + fg = og = \frac{ab + cd}{2}$

Wird dieser Werth in den früher §. 29. gefundenen Ausdruck $abdc = \frac{ab + cd}{2} . ae$ substituirt, so folgt $abdc = og . ae$, d. h. der Flächeninhalt eines Trapezes wird gefunden, wenn man die, durch den Mittelpunkt einer der nicht parallelen Seiten parallel gezogene Gerade o g mit dem Abstande der parallelen Seiten multiplizirt.

§. 43. **Aehnlichkeit der Polygone.** Da zwei nach demselben Gesetze gebildete Polygone, die also bloß durch ihre Größe sich unterscheiden, ähnlich sind; so müssen auch zwei Polygone ähnlich sein, wenn die Seiten des einen jenen des andern in der Ordnung, wie sie aneinander liegen, proportionirt, und jene Winkel, die von diesen Seiten eingeschlossen werden, wechselweise gleich sind. Verhält sich nämlich (Fig. 66.)

Fig. 66.



AB : ab = BC : bc = CD : cd = . . . und ist W. A = a, W. B = b, W. C = c . . . . so sind beide Polygone ähnlich. Solche Seiten wie AB und ab, die in ähnlichen Polygonen zwischen wechselweise gleichen Winkeln A und a, B und b liegen, heißen homolog; und jene Winkel, wie B und b, die von homologen Seiten AB und ab, BC und bc eingeschlossen werden, sind homologe Winkel.

1) Zwei Polygone ABCDE und abcde sind ähnlich, wenn sie aus gleich vielen ähnlichen Dreiecken ABE und abe, BCE und bce, CDE und cde auf dieselbe Art zusammengesetzt sind. Vermöge der Voraussetzung verhält sich BE : be = AE : ae = AB : ab, aber auch BE : be = BC : bc, somit hat man AE : ae = AB : ab = BC : bc, und eben so wird die Proportionalität der übrigen Seiten bewiesen. In den ähnlichen Dreiecken ABE und abe ist W. ABE = abe, ferner wegen △ EBC ∾ ebc ist auch W. EBC = ebc, also ergibt sich W. ABE + EBC = abe + ebc oder ABC = abc. Auf dieselbe Art folgt die Gleichheit der übrigen Winkel, und hieraus die Aehnlichkeit beider Polygone.

2) Regelmäßige Polygone von gleich viel Seiten sind ähnlich. Es seien ABCDE und abcde zwei nseitige regelmäßige Polygone, so folgt AB = BC = CD = ... und ab = bc = cd = . . . somit AB : ab = BC : bc = CD : cd = ... ꝛc. Die Summe aller Winkel im nseitigen Polygone ist §. 24. 4. $2nR - 4R$, und wenn es regulär ist, so gibt der Ausdruck $\frac{2nR - 4R}{n}$ die Größe jedes Winkels in demselben an. Die beiden Polygone haben also die Seiten proportionirt und die homologen Winkel gleich, folglich sind sie ähnlich.

3) Ein Polygon zu konstruiren, welches einem gegebenen ABCDE ähnlich sei, und dessen mit AE homologe Seite die Länge ae habe. Man ziehe die Diagonalen EB und EC, und konstruire nach §. 35. 5. zu ae das △ abe ∾ △ ABE, ferner △ ebc ∾ △ EBC und △ cde ∾ △ CDE, so ist vermöge 1. abcde das verlangte Polygon. Man kann aber das Verfahren auch auf folgende Art einleiten. Es sei EF = ae, dann FG || AB, GH || BC und HK || DC, so ist EFGHK das gesuchte Polygon.

§. 44. **Eigenschaften ähnlicher Polygone.** Zwei in ähnlichen Polygonen ABCDE und abcde gezogene Diagonalen (Fig. 66.) BE und be heißen homolog, wenn die Winkel B und E, deren Scheitel die erstere verbindet, jenen b und e, deren Scheitel durch letztere verbunden werden, homolog sind. Aehnliche Polygone wollen wir stets so bezeichnen, daß die homologen Seiten, somit auch die homologen Winkel und Diagonalen mit denselben Buchstaben versehen sind.

1) Aehnliche Polygone ABCDE und abcde werden durch homologe Diagonalen BE und be, EC und ec in gleich viele ähnliche Dreiecke getheilt. Da die genannten Polygone ähnlich sind, so folgt AE : ae = AB : ab und W. A = a, daher muß §. 34. 2. das △ ABE ∾ abe sein, somit ist W. ABE = abe und es verhält sich AB : ab = BE : be; allein wegen der Voraussetzung hat man auch

AB : ab = BC : bc, demnach ergibt sich die Proportion BE : be = BC : bc, ferner ist W. ABC = W. abc, also auch W. ABC — ABE = W. abc — abe oder W. EBC = ebc; daher ist das △ EBC ∾ ebc, und eben so wird bewiesen, daß △ DCE ∾ dce sei. Aus BE : be = BC : bc folgt auch der Satz:

2) In ähnlichen Polygonen sind die homologen Diagonalen den homologen Seiten proportionirt.

3) Die Umfänge ähnlicher Polygone ABCDE und abcde sind den homologen Seiten und Diagonalen proportionirt; denn es verhält sich AB : ab = BC : bc = CD : cd = . . . somit hat man (AB + BC + CD + . .) : (ab + bc + cd + . .) = BC : bc = BE : be.

4) Die Flächeninhalte ähnlicher Polygone ABCDE und abcde verhalten sich wie die Quadrate der homologen Seiten und Diagonalen. Zieht man die Diagonalen BE und be, dann CE und ce, so ist △ ABE ∾ abe, △ BCE ∾ bce und △ DCE ∾ dce. Da aber ähnliche Dreiecke wie die Quadrate ihrer homologen Seiten sich verhalten, so folgt:

△ ABE : △ abe = $AB^2 : ab^2$, △ BCE : △ bce = $BC^2 : bc^2$ und △ DCE : △ dce = $CD^2 : cd^2$. Nun sind in ähnlichen Polygonen die homologen Seiten, somit auch ihre Quadrate proportionirt; daher hat man $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : dc^2$, also ergibt sich △ ABE : △ abe = △ BCE : △ bce = △ CDE : △ cde = $AB^2 : ab^2$, und hieraus folgt:

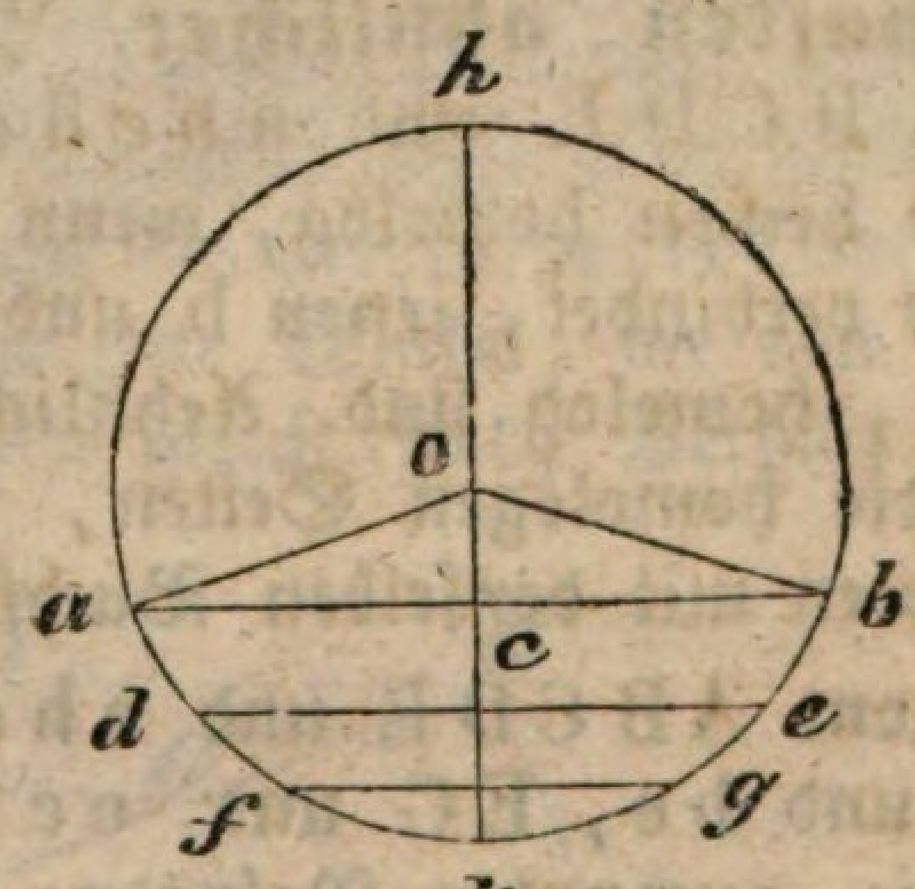
(△ ABE + △ BCE + △ CDE + . .) : (abe + △ bce + △ cde + . .) = $AB^2 : ab^2$ oder ABCDE : abcde = $AB^2 : ab^2$ Es sind aber nach 2. die homologen Seiten den homologen Diagonalen proportionirt, demnach verhält sich auch ABCDE : abcde = $BE^2 : be^2$.

VI. Lehre vom Kreise.

§. 45. Grundeigenschaften des Kreises.

1) Werden die den Endpunkten (Fig. 67.) a und b einer Sehne

Fig. 67.

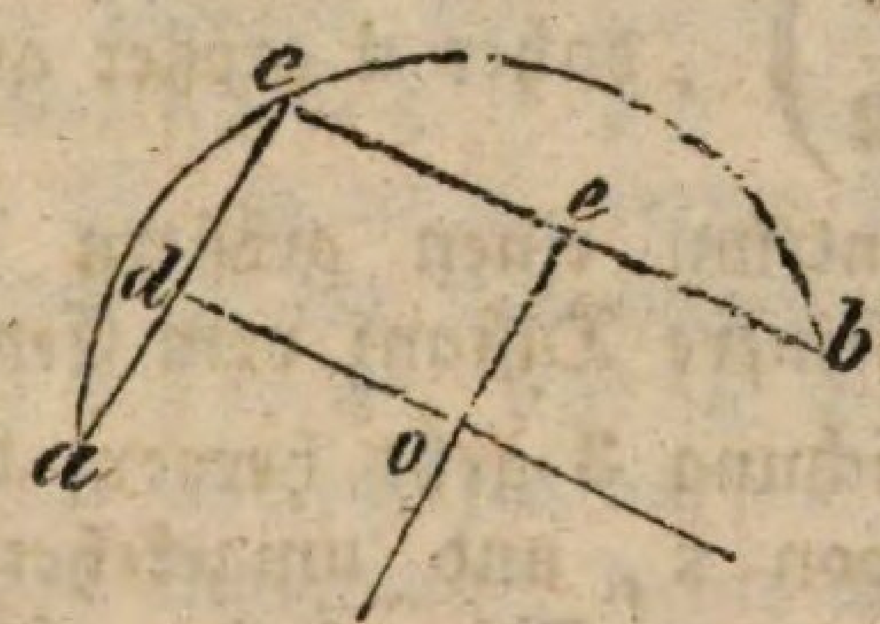


ab, die kein Durchmesser ist, entsprechenden Radien ao und bo gezogen, so entsteht ein gleichschenkliges △ aob, dessen Basis ab durch die von der Spitze o auf sie errichtete Senkrechte oc halbirt wird; die

vom Centrum auf eine Sehne gezogene Senkrechte halbirt also immer dieselbe. Eben so werden auch die mit a b parallelen Sehnen d e und f g durch die Verlängerung von c c in zwei gleiche Theile getheilt. Wird nun die Gerade o c verlängert, bis sie als ein Durchmesser h k erscheint, so halbirt sie das ganze System der auf ihr senkrechten Sehnen; daher halbirt der Durchmesser die Kreislinie und die durch sie begrenzte Ebene. Aus dem gleichschenkligen △ a o b geht auch hervor, daß die Gerade o c, welche den Mittelpunkt o des Kreises mit jenem c einer Sehne a b verbindet, auf derselben senkrecht stehe.

2) Jede Sehne, die kein Durchmesser ist, kann als die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Spitze das Centrum ist, betrachtet werden; da nun die vom Mittelpunkte der Basis auf sie errichtete Senkrechte hinreichend verlängert, stets die Spitze des Dreiecks trifft, so muß auch die Senkrechte, welche von der Mitte einer Sehne auf dieselbe gezogen wird, durch das Centrum des Kreises gehen. Dieser Satz lehrt, wie man den unbekannten Mittelpunkt eines Kreises bestimmen kann; es ist nämlich bloß nothwendig, auf eine Sehne a b von ihrer Mitte aus eine Senkrechte zu errichten, und sie zu verlängern, bis ein Durchmesser entsteht, dessen Mittelpunkt das gesuchte Centrum ist. Ist aber nur ein Bogen (Fig. 68.) a c b gegeben, und das Centrum des

Fig. 68.



entsprechenden Kreises zu finden, so muß man von den Mittelpunkten d und e zweier nicht paralleler Sehnen a c und b c auf sie Senkrechte errichten, und der Durchschnitt o derselben bestimmt dann den gesuchten Mittelpunkt.

3) Es läßt sich leicht ein Kreis finden, dessen Peripherie durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte a, c und b geht; denn man braucht nur die Geraden a c und b c zu ziehen, und sie als Sehnen des gesuchten Kreises zu betrachten. Der Punkt o ist dann wieder das verlangte Centrum. Da auf jede der beiden Geraden a c und b c von ihrer Mitte aus nur eine Senkrechte möglich ist, so kann auch nur ein einziger Punkt o der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sein; daher durch jene drei Punkte a, c und b nicht mehr als ein einziger Kreis beschrieben werden kann, folglich ist durch die Lage dreier, nicht in einer geraden Linie liegender Punkte der durch sie gezogene Kreis der Lage und Größe nach, also vollkommen bestimmt.

§. 46. Eigenschaften der Sehnen rücksichtlich ihres Abstandes vom Centrum. Zieht man vom Centrum o (Fig. 67.) auf eine Sehne a b eine Senkrechte o c und auch den Radius b o, so entsteht ein rechtwinkliges △ b o c, dessen eine Kathete b c die

Hälfte der Sehne ab ist, und durch $\frac{s}{2}$ bezeichnet werden soll; die andere oc ist der Abstand der Sehne ab vom Centrum, und sei d; die Hypothenuse bo endlich ist der Radius und heiße r. Nun ergibt sich durch Anwendung des pythagorischen Lehrsatzes nach §. 32. 2. die Gleichung $bo^2 = oc^2 + bc^2$ oder (1) $r^2 = d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$ Vermöge der hier gefundenen Abhängigkeit der Größen r, s und d kann jede derselben berechnet werden, wenn die beiden andern bekannt sind; so findet man 2) $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ und 3) $s = 2\sqrt{r^2 - d^2}$. Aus diesen Gleichungen wollen wir einige Eigenschaften der Sehnen ableiten, aber voraussetzen, daß r eine unveränderliche Größe sei, somit die dießfälligen Resultate stets auf denselben oder auf gleiche Kreise beziehen.

1) So oft s denselben Werth erhält, ergibt sich aus der Gleichung 2. auch der nämliche Werth von d; daher haben gleiche Sehnen vom Centrum gleiche Abstände.

2) Läßt man in der Gleichung 2. s kleiner werden, so wird es auch der Ausdruck $\left(\frac{s}{2}\right)$, daher d größer ausfallen muß; also hat die kleinere Sehne vom Centrum einen größern Abstand, und der größern Sehne entspricht eine kleinere Distanz vom Centrum.

3) Aus der Gleichung 3 geht hervor, daß die Vergrößerung von d eine Verminderung von s, und umgekehrt die Verkleinerung von d eine Vermehrung von s zur Folge habe; solche Sehnen also, die vom Centrum ungleiche Distanzen haben, müssen daher auch ungleich sein, und zwar ist jene die größere, die den kleinern Abstand hat.

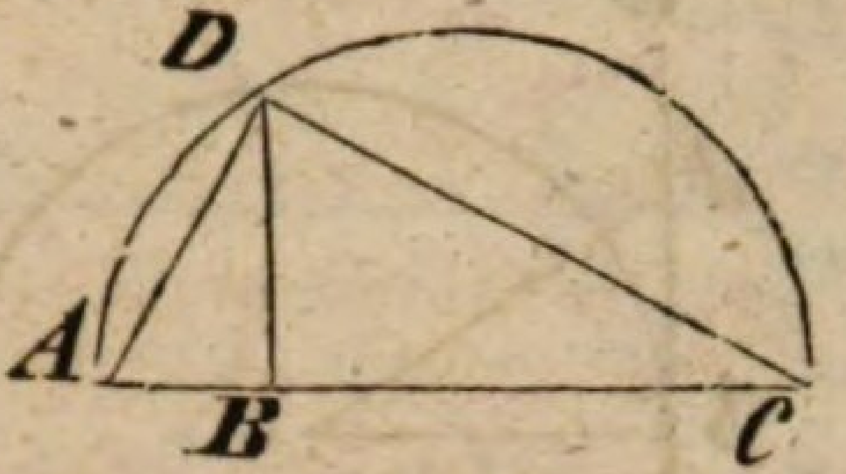
4) Für den kleinsten Werth von d ergibt sich aus Gleichung 3 der größte Werth von s, also findet man, wenn $d = o$ gesetzt wird, die größte Sehne $s = 2\sqrt{r^2} = 2r$; daher der Durchmesser die größte Sehne ist, die im Kreise gezogen werden kann.

5) Die halbe Sehne $bc = \frac{s}{2}$ steht offenbar senkrecht auf dem Durchmesser hk, wir wollen sie nun aus der Gleichung 1. bestimmen; so ergibt sich $bc^2 = r^2 - d^2$ oder $bc^2 = (r + d)(r - d)$, folglich $r + d : bc = bc : r - d$; allein es ist $r + d = ho + oc = hc$ und $r - d = ok - oc = ck$, daher findet man $hc : bc = bc : ck$, d. h. die von einem Punkte b der Kreislinie auf einen Durchmesser hk gezogene Senkrechte bc ist die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten hc und kc desselben.

6) Mit Hilfe dieses Satzes ist es sehr leicht, zu zwei gegebenen Geraden (Fig. 69.) a und b die mittlere Proportionale zu finden. Man mache nämlich $AB = a$, $BC = b$, beschreibe über AC als Durch-

messer einen Halbkreis, und errichte dann auf AC die Senkrechte BD, welche die verlangte Gerade ist.

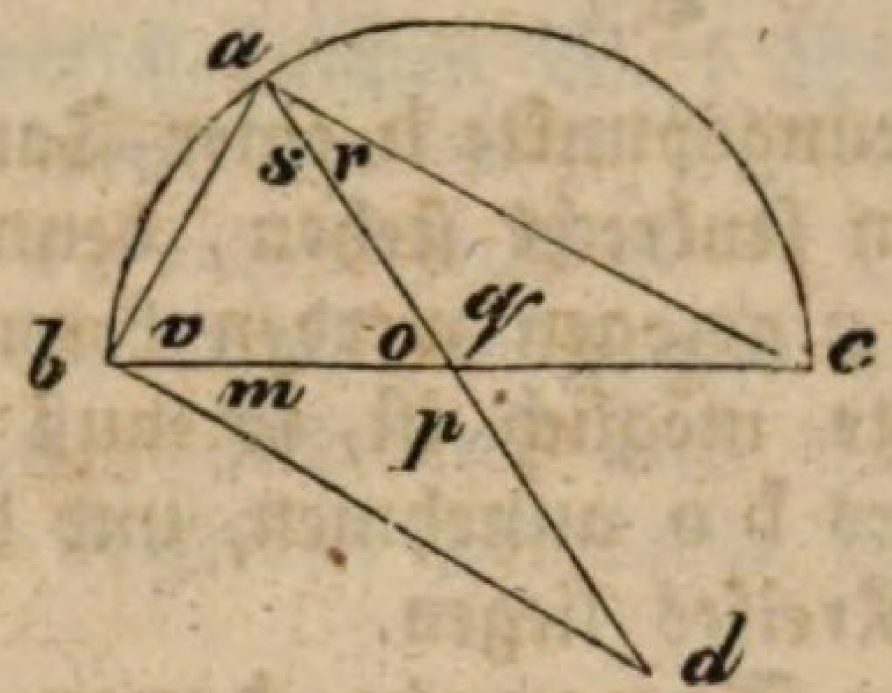
Fig. 69.



§. 47. **Vom Winkel im Halbkreise.**

1) Verbindet man den Mittelpunkt (Fig. 70.) o der Hypothe-

Fig. 70.



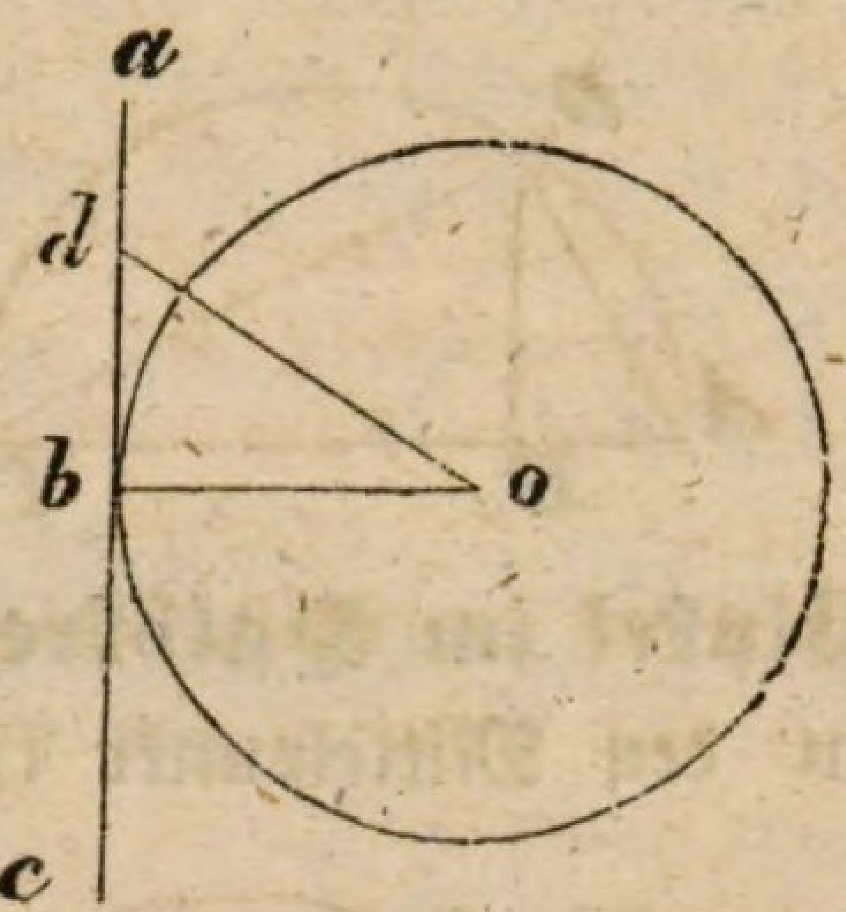
nuse bc des rechtwinkligen Dreiecks abc mit dem Scheitel des rechten Winkels a, so ist die Gerade ao gleich der halben Hypothenuse. Man ziehe um dieß zu beweisen bd ⊥ ab und verlängere ao bis d. Nun ist bd ∥ ac, also W. m = n, ferner W. p = q als Scheitelwinkel, und bo = oc vermöge der Voraussetzung, also nach §. 10. 2. △bod ≅ △aoc, daher bd = ac. Aus der Vergleichung der Dreiecke abd und abc, ergibt sich endlich bd = ac, ab = ab und W. abd = bac = R, also ihre Kongruenz, somit W. s = v; demnach ist vermöge §. 15. 1. aob ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis ab ist, somit bo = ao. Wird nun von o aus als Centrum mit dem Halbmesser bo ein Kreis beschrieben, so muß dieser durch den Scheitel des rechten Winkels a gehen. Auf diese Art entsteht ein W. bac, dessen Scheitel a in der Kreislinie liegt, dessen Schenkel ab und ac durch die Endpunkte b und c desselben Durchmessers bc gehen, und der ein Winkel im Halbkreise genannt wird.

2) Der Winkel im Halbkreise ist immer ein rechter. Beweis. Offenbar ist nach §. 24. (Fig. 70.) W. bac + v + n = 2R, und zieht man den Radius ao, so wird W. bac = s + r; weil aber bo = ao = oc ist, so folgt W. v = s und W. n = r und durch Substitution dieser Werthe in obige Gleichung ergibt sich W. bac + s + r = 2R, oder 2 W. bac = 2R, daher W. bac = R.

§. 48. **Von der Tangente, deren Berührungspunkt gegeben ist.** Eine Gerade, welche auf beiden Seiten noch so weit verlängert, mit dem Kreise nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, heißt Tangente, und jener Punkt Berührungspunkt. Zu einem Punkte b (Fig. 71.) des Kreises wird nun eine Tangente gezogen, wenn man auf den entsprechenden Halbmesser bo von b aus eine Senkrechte ac errichtet; denn jeder andere Punkt d der ac gibt, mit o verbunden, die Hy-

pothenuse d o eines rechtwinkligen Dreiecks b o d; daher ist d o > b o, somit liegt d außerhalb des Kreises.

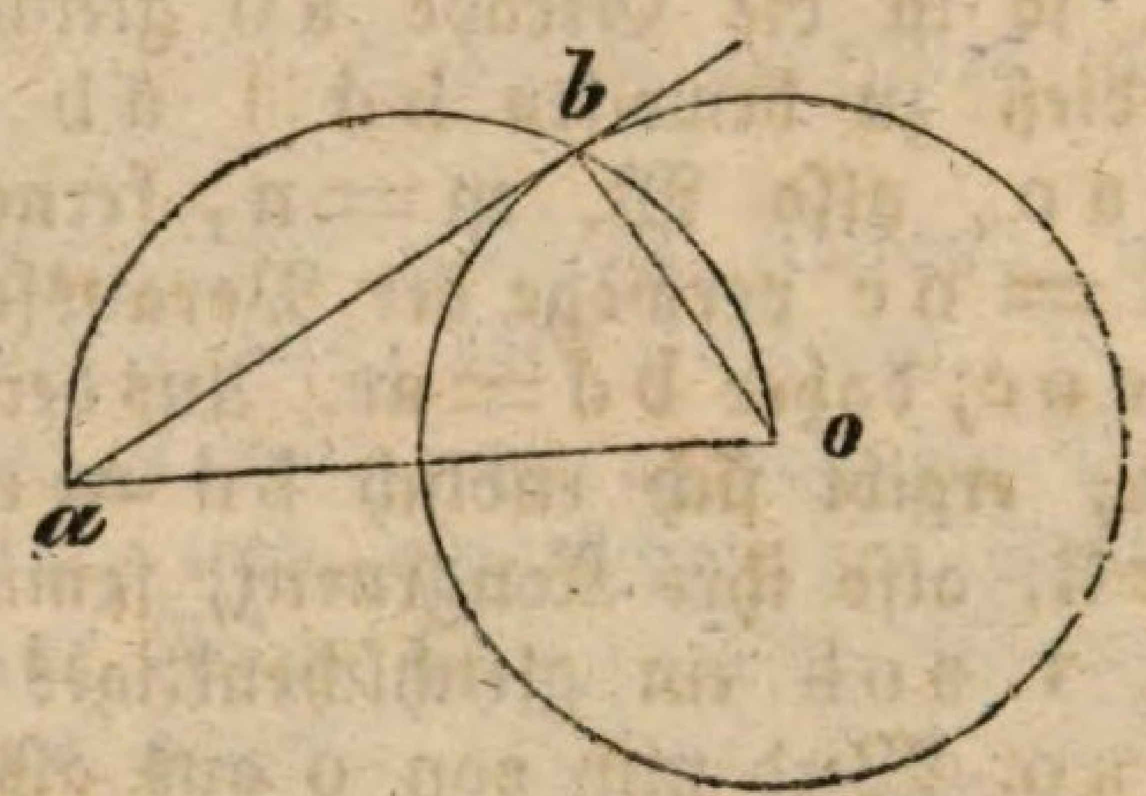
Fig. 71.



Der zum Berührungspunkte b einer Tangente a c gezogene Radius b o muß auf derselben senkrecht stehen, denn er ist die kürzeste Gerade, welche von o aus zu a c gezogen werden kann; da ferner von b aus auf a c nur eine Senkrechte möglich ist, so muß diese stets die Lage des entsprechenden Halbmessers b o annehmen, und daher in dieser Senkrechten der Mittelpunkt des Kreises liegen.

§. 49. **Von der Tangente, deren Berührungspunkt bestimmt werden soll.** Hat man von einem Punkte (Fig. 72.) a

Fig. 72.

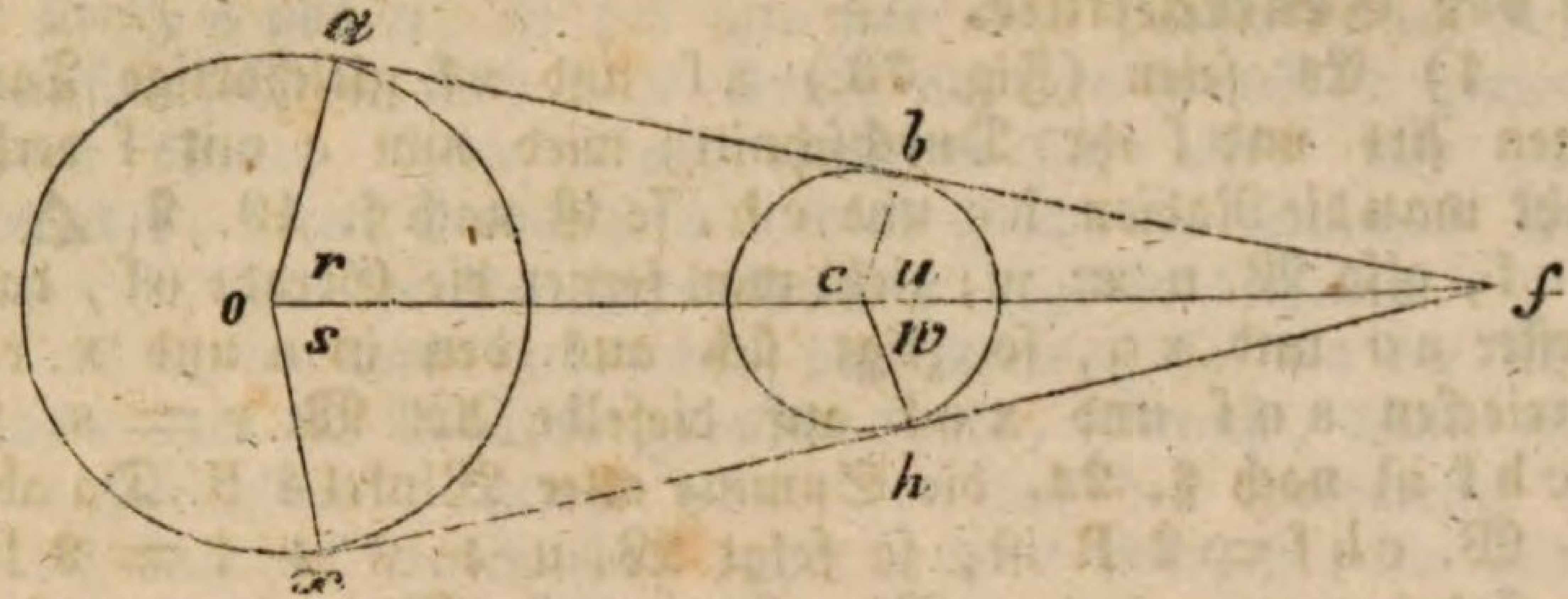


außerhalb eines Kreises zu diesem eine Tangente zu ziehen, also den Berührungspunkt zu finden; so verbinde man a mit o und beschreibe über a o als Durchmesser den Halbkreis, welcher den Durchschnitt b gibt, und durch Verbindung desselben mit a entsteht die gesuchte Tangente ab; denn wird noch b o gezogen, so hat man einen W. a b o im Halbkreise, folglich a b ⊥ b o. Unterhalb a o kann noch eine zweite eben so große Tangente gezogen werden.

§. 50. **Von den Tangenten zweier Kreise.** Zwei Kreise seien der Größe und Lage nach gegeben, und zu beiden soll eine Tangente gezogen werden.

1) Die beiden Kreise sind der Größe nach durch ihre Radien, die wir (Fig. 73.) R und r heißen wollen, und der Lage nach durch den Abstand o c = d ihrer Mittelpunkte, den man Centrallinie nennt, bestimmt. Es kommt hier offenbar darauf an, den Punkt f der verlängerten Centrallinie zu finden, der die Lage besitzt, daß die von demselben zum ersten Kreise gezogene Tangente auch den zweiten Kreis berühre. Gesetzt nun, es sei a b f die gesuchte Tangente, so müssen die Radien a o und b c

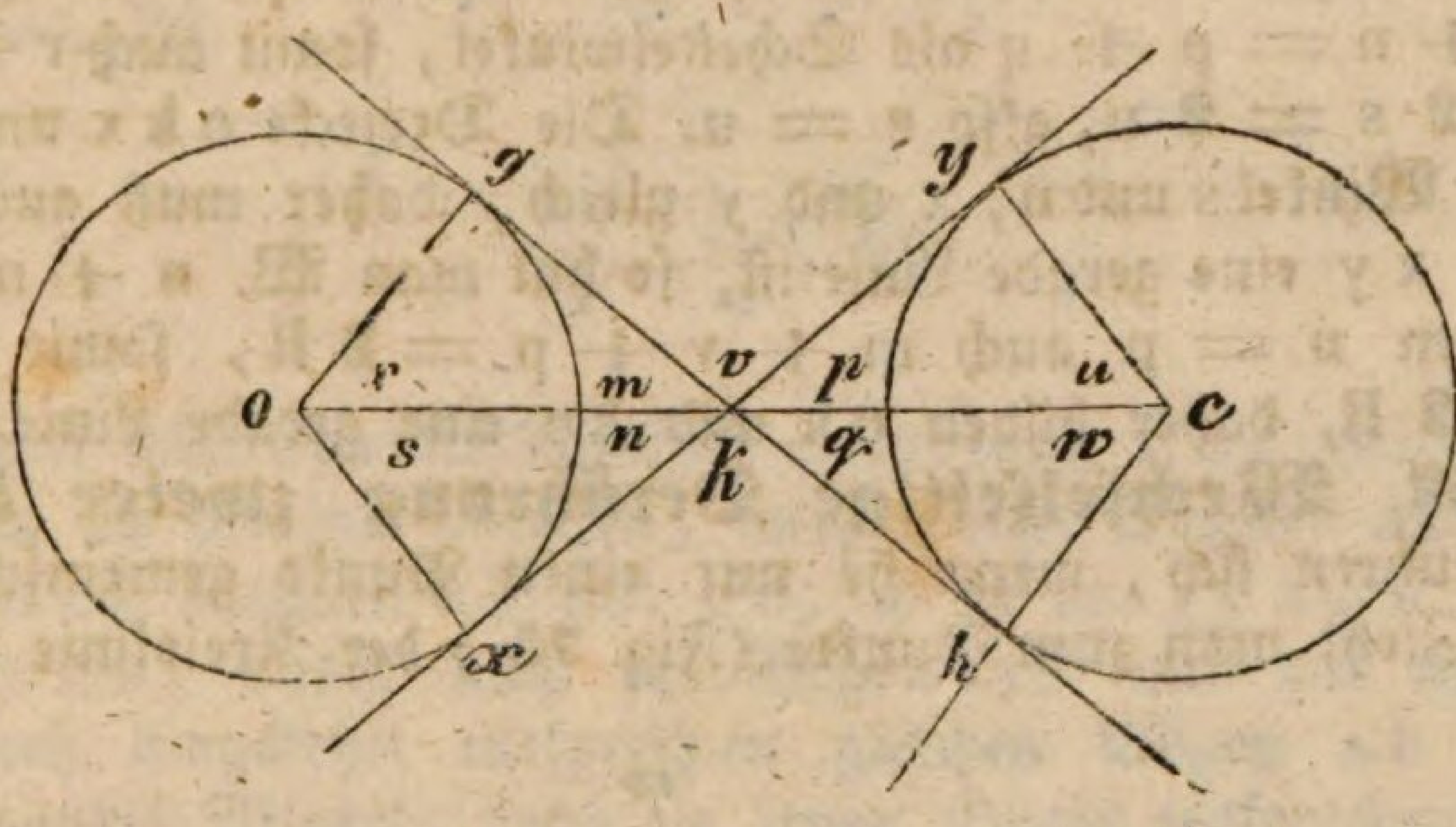
Fig. 73.



auf derselben senkrecht stehen, und die rechtwinkligen Dreiecke a o f und b c f sind wegen des gemeinschaftlichen W. f ähnlich; folglich hat man a o : b c = o f : c f oder, wenn a o = R, b c = r und c f = z gesetzt wird, R : r = d + z : z, daher auch R — r : r = d : z. Um den gesuchten Punkt f zu finden, braucht man also nur zu R — r, r und d die vierte Proportionale zu bestimmen, und c f dieser gleich zu machen. Eine zweite Tangente derselben Art kann auch unterhalb konstruirt werden.

2) Die Tangente zweier Kreise kann ihre Lage auch zwischen denselben haben. Sind die beiden Kreise ihrer Größe und Lage nach gegeben, also die Radien (Fig. 74.) o g = R, c h = r und die Centrallinie

Fig. 74.



o c = d bekannt; so läßt sich die Bestimmung der dießfälligen Tangente auf ähnliche Art, wie jene der frühern, ausführen. Auch hier handelt es sich nur um Auffindung jenes Punktes der Centrallinie, von welchem eine Gerade tangirend zu einem Kreise gezogen, auch zugleich Tangente des zweiten wird. Ist nun k dieser Punkt, g h die gesuchte Tangente, und sind g und h die Berührungspunkte derselben, so müssen die in g und h rechtwinkligen Dreiecke o k g und c k h wegen W. m = q ähnlich sein; also folgt o g : c h = o k : c k oder o g + c h : c h = o k + c k : c k, somit R + r : r = d : c k. Die vierte Proportionale zu R + r, r und d von c gegen o aufgetragen, gibt also den gesuchten Punkt k. Da von k zum Kreise g x noch die Tangente k x gezogen werden kann, so muß es auch noch eine zweite hierher gehörige Tangente x y geben.

§. 51. Der Durchschnitt gleichartiger Tangenten liegt in der Centrallinie.

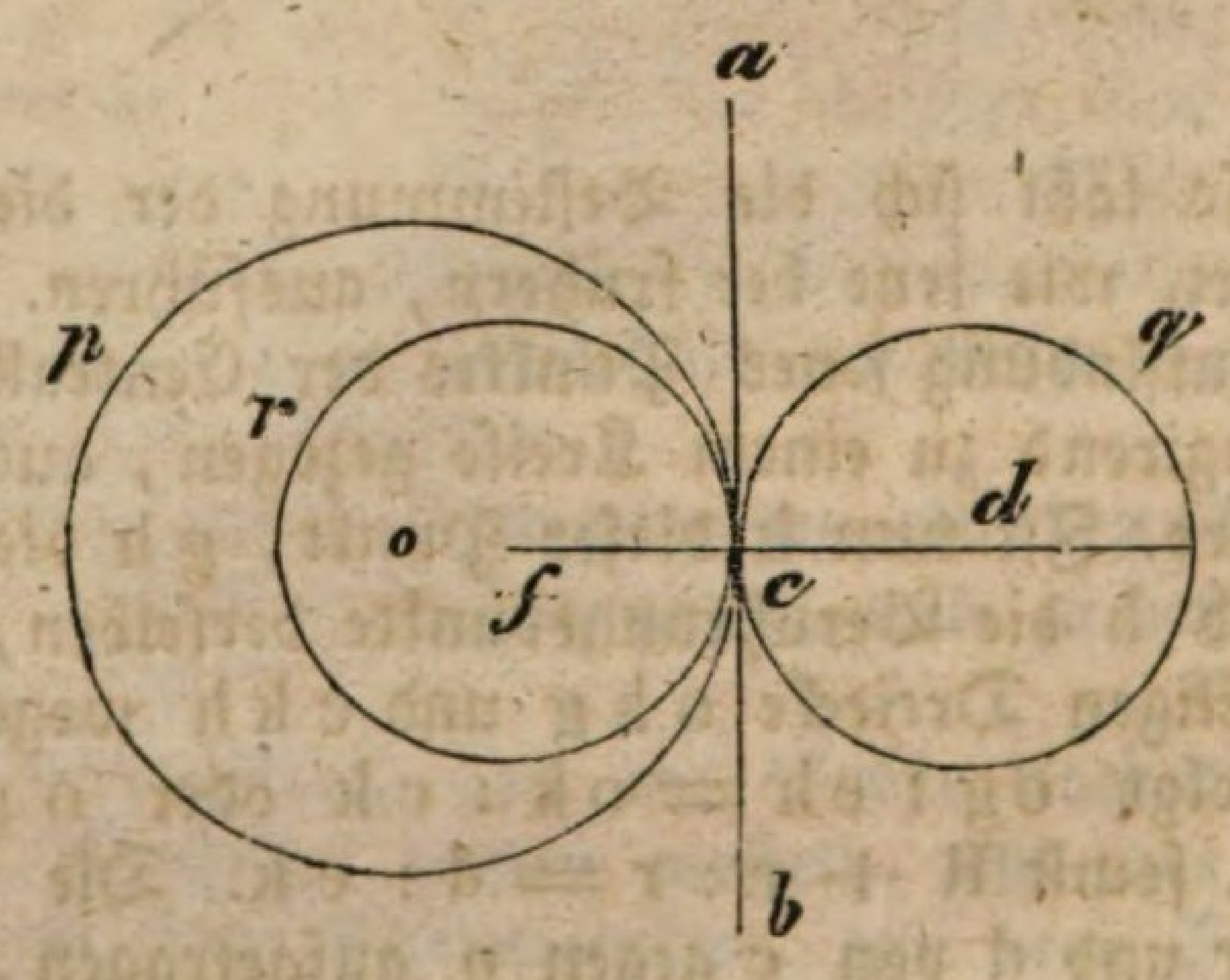
1) Es seien (Fig. 73.) af und xf gleichartige Tangenten der einen Art und f ihr Durchschnitt; wird nun c mit f verbunden, und zieht man die Radien bc und ch, so ist nach §. 19. 2. △ bcf ≅ △ hcf, also W. u = w; zieht man ferner die Gerade of, dann die Halbmesser ao und xo, so zeigt sich aus den in a und x rechtwinkligen Dreiecken aof und xof auf dieselbe Art W. r = s. Im Vierecke bchf ist nach §. 24. die Summe aller Winkel 4 R. Da aber W. cbf + W. chf = 2 R ist, so folgt W. u + w + t = 2 R; und eben so findet man aus dem Vierecke aoxf, W. r + s + f = 2 R; daher u + w + f = r + s + f oder u + w = r + s, somit auch 2 u = 2 r, also u = r. Da aber W. oaf = W. cbf = R, so müssen auch die dritten Winkel der Dreiecke aof und bcf gleich, also W. afo = W. bfc sein; demnach fällt cf mit of zusammen, und daher liegen die Punkte o, c und f in einer geraden Linie.

2) Es seien (Fig. 74.) gh und xy gleichartige Tangenten der zweiten Art, g, h, x und y die Berührungspunkte und k der Durchschnitt. Zieht man die Gerade ok, so ist △ okg ≅ okx also W. r = s, und mittelst der Geraden ck findet man △ cky ≅ ckh, daher W. u = w. Aus dem Vierecke ogkx ergibt sich wegen W. g = x = R r + s + m + n = 2 R, und eben so auch p + q + u + w = 2 R, daher r + s + m + n = p + q + u + w; nun ist aber m + n = p + q als Scheitelwinkel, somit auch r + s = u + w, demnach 2 s = 2 u, also s = u. Die Dreiecke okx und cky haben also zwei Winkel s und u, x und y gleich, daher muß auch W. n = p sein. Da xy eine gerade Linie ist, so hat man W. n + m + v = 2 R, oder wegen n = p auch m + v + p = 2 R, somit W. okg + gkc = 2 R, daher bilden ok und kc eine gerade Linie.

§. 52. Wechselseitige Berührung zweier Kreise. Zwei Kreise berühren sich, wenn sie nur einen Punkt gemeinschaftlich haben.

1) Zieht man zum Punkte (Fig. 75.) der Kreislinie p, deren Cen-

Fig. 75.



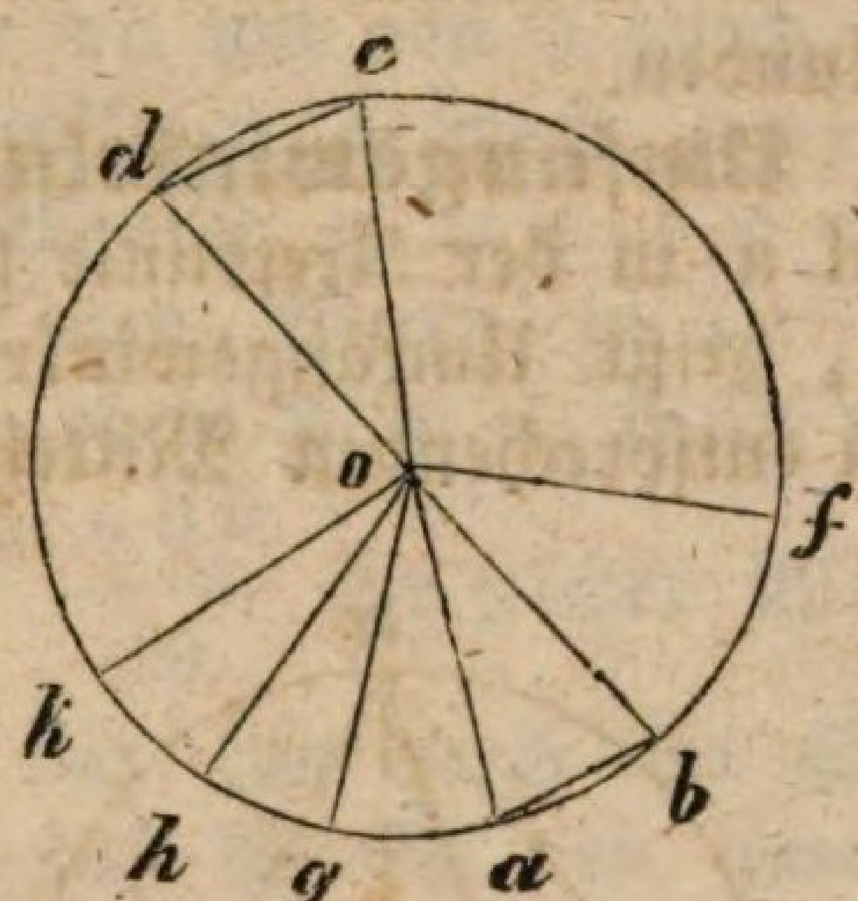
trum o ist, eine Tangente, also ab ⊥ oc, verlängert dann oc beliebig bis d und beschreibt von d aus mit dem Radius cd den Kreis q, so ist ab

auch eine Tangente desselben in c, folglich eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise p und q, sie hat also nur den Punkt c mit jenen Kreisen gemeinsam, daher auch diese Kreise nur den Punkt c gemeinschaftlich haben können. Jene Kreise berühren sich also, und zwar außerhalb einander, deren Centrallinie o d ist gleich der Summe ihrer Radien o c + c d, und der Berührungspunkt c liegt in derselben.

2) Ist c d < o c und dreht man den Kreis q so um die Tangente a b, daß c stets der Berührungspunkt bleibt, so muß, wenn endlich q auf die Kreisebene p gelegt wird, c d auf den Halbmesser o c fallen, und die Lage c f annehmen, daher q in r übergeht; die beiden Kreise p und r berühren sich also innerhalb einander, deren Centrallinie o f ist die Differenz ihrer Radien o c — f c und der Berührungspunkt c liegt in der Richtung derselben.

§. 53. **Von den Mittelpunkts-Winkeln.** Der W. a o b (Fig. 76.), dessen Scheitel o das Centrum des Kreises ist, heißt Mittelpunkts-Winkel, die Scheitel a o und b o desselben werden stets bis an die Kreislinie gezogen, und sind daher Radien derselben.

Fig. 76.



1) Gleichen Mittelpunkts-Winkeln a o b und c o d entsprechen in demselben, oder in gleichen Kreisen, auch gleiche Sehnen und Bögen; denn zieht man die Sehnen a b und c d, so ist das $\triangle$ a o b $\cong$ d o c; folglich a b = c d; daher auch die Bögen a b und c d nach §. 6. gleich sind. Auch umgekehrt entsprechen gleichen Bögen a b und c d gleiche Mittelpunkts-Winkel; denn die jenen Bögen entsprechenden Sehnen a b und c d sind gleich, daher ist das $\triangle$ a o b $\cong$ $\triangle$ c o d, somit W. a o b = W. d o c.

2) In demselben oder in gleichen Kreisen verhalten sich die Mittelpunkts-Winkel d o a und b o f wie die zwischen ihren Schenkeln liegenden Bögen a d und b f. Für den Fall des kommensurabeln Verhältnisses jener Bögen muß denselben ein gemeinschaftliches Maß, wir wollen es α heißen, zukommen; ist dieser als Einheit angenommene, mit a d und b f gleichartige Bogen in a d mmal und in b f nmal enthalten, so hat man $\overset{\frown}{ad} : \overset{\frown}{bf} = m : n$. Wird nun α so oft als möglich auf den Bogen a d aufgetragen, und ist $\overset{\frown}{ag} = \overset{\frown}{gh} = \overset{\frown}{hk} = \ldots = \alpha$, so ergeben sich, wenn man die Radien o g, o h, o k ... zieht, gleiche Mittelpunkts-Winkel a o g, g o h, h o k, ... und heißt jeder derselben β, so folgt W. a o d = m. β. Auf gleiche Weise zeigt sich auch W. b o f

$= n . \beta$; daher hat man W. a o d : W. b o f $= m : n$, folglich W. a o d : W. b o f $=$ a d : b f. Wenn die Bögen a d und b f im inkommensurabeln Verhältnisse stehen, so wird dieser Satz auf ähnliche Art wie jener im §. 27. 1. erwiesen.

3) Auf den hier entwickelten Sätzen beruht die Bestimmung der Winkel durch Grade. Wird nämlich die Kreislinie in 360 gleiche Theile getheilt, so heißt jeder derselben ein Grad; und die Anzahl Grade, welche dem Bogen a b, der dem Mittelpunkts-Winkel a o b entspricht, zukommt, bestimmt dessen Größe. Ist z. B. a b ein Bogen von 30 Graden, so ist der W. a o b 30mal so groß, als ein Mittelpunkts-Winkel, dem ein Bogen von einem Grade entspricht; er wird aber dann kurz ein Winkel von 30 Graden genannt. Um also die Größe eines Winkels in Graden anzugeben, muß man vom Scheitel desselben als Centrum zwischen seinen Schenkeln mit beliebigem Halbmesser einen Bogen beschreiben, und die Anzahl Grade desselben bestimmen. So hat z. B. der rechte Winkel 90 Grade. Der Grad wird in 60 gleiche Theile, Minuten, und die Minute in 60 Sekunden getheilt. Für diese Größen werden die Zeichen ^{0}, $'$, $''$ angenommen, daher heißt der Ausdruck $18^{0}\ 16'\ 17''$ so viel als 18 Grade, 16 Minuten und 17 Sekunden.

§. 54. **Von den Umfangswinkeln.** Ein Winkel wie (Fig. 77.) d a c, dessen Scheitel a in der Kreislinie liegt, und dessen Schenkel a d und a c Sehnen sind, heißt Umfangswinkel. Ein solcher Winkel ist immer die Hälfte des ihm entsprechenden Mittelpunkts-Winkels.

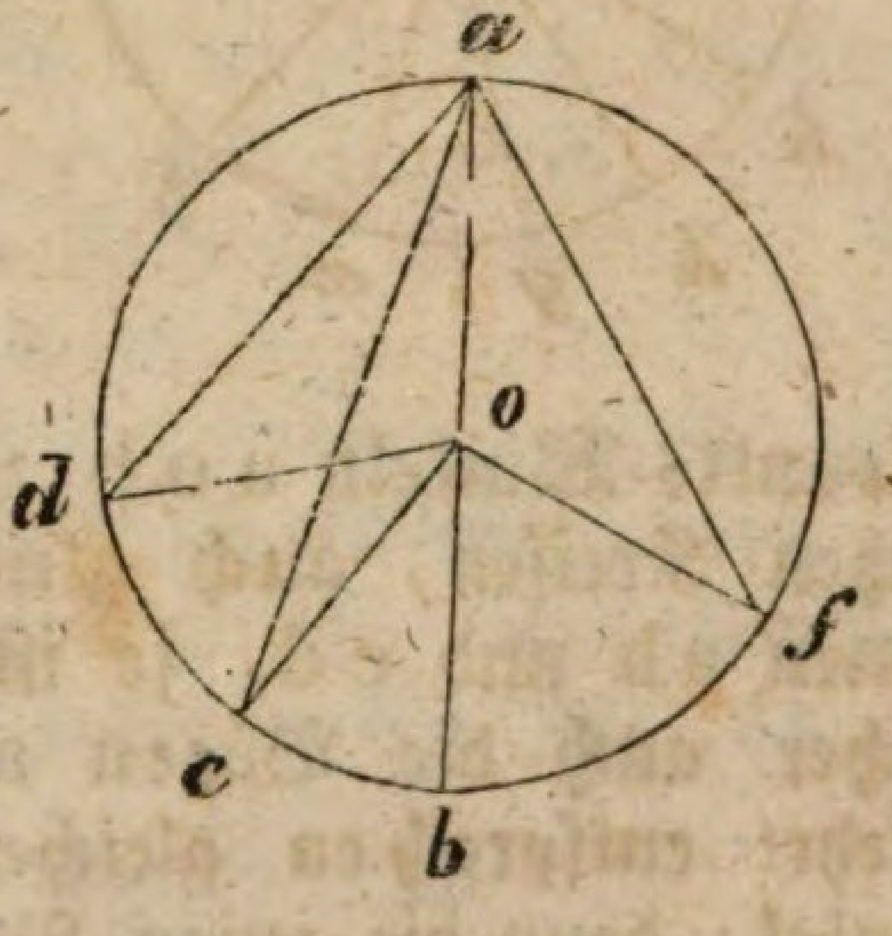


Fig. 77.

1) Betrachtet man, um diesen Satz zu beweisen, zuerst den Umfangswinkel b a c, in dessen einem Schenkel a b das Centrum o liegt, so ziehe man o c und nun ist der äußere W. b o c $=$ c a o $+$ a c o; allein vermöge a o $=$ o c ist W. c a o $=$ a c o, somit ergibt sich W. b o c $=$ 2 W. c a o, daher W c a o $=$ b a c $= \frac{1}{2}$ W. b o c.

2) Um diesen Satz für einen Umfangswinkel c a f, zwischen dessen Schenkeln das Centrum liegt, zu rechtfertigen, hat man den Durchmesser a b und die Halbmesser c o und o f zu ziehen, und nun zeigt sich nach 1. W. b a c $= \frac{1}{2}$ W. b o c und W. b a f $= \frac{1}{2}$ W. b o f, also W. b a c $+$ b a f $= \frac{1}{2}$ W. b o c $+ \frac{1}{2}$ W. b o f, oder W. c a f $= \frac{1}{2}$ W. c o f.

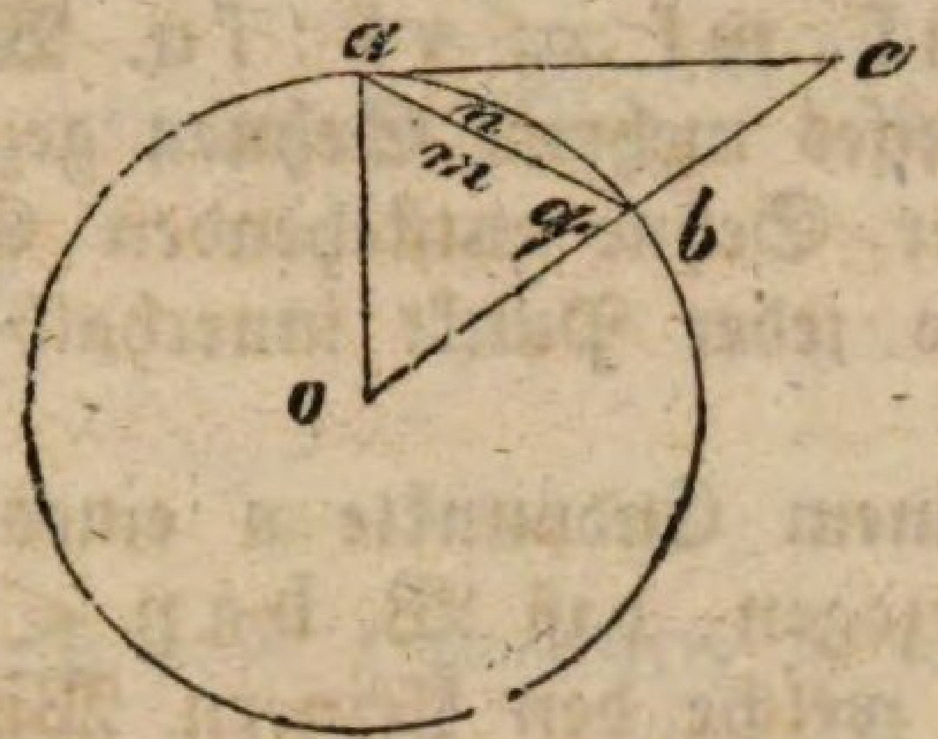
3) Für den Fall endlich, wenn das Centrum außerhalb des Winkels liegt, also rücksichtlich des W. d a c, ziehe man a b, d o und c o und

nun erhält man nach 1. W. $bad = \frac{1}{2}$ W. bod, und W. $bac = \frac{1}{2}$ W. boc; also W. bad — W. $bac = \frac{1}{2}$ W. $bod - \frac{1}{2}$ W. boc, oder W. $dac = \frac{1}{2}$ W. doc.

4) Umfangswinkel verhalten sich also auch wie die ihnen entsprechenden Bögen und müssen daher gleich sein, wenn diese letztern es sind, und umgekehrt.

5) Der von einer Sehne (Fig. 78.) a b und Tangente a c gebil-

Fig. 78.

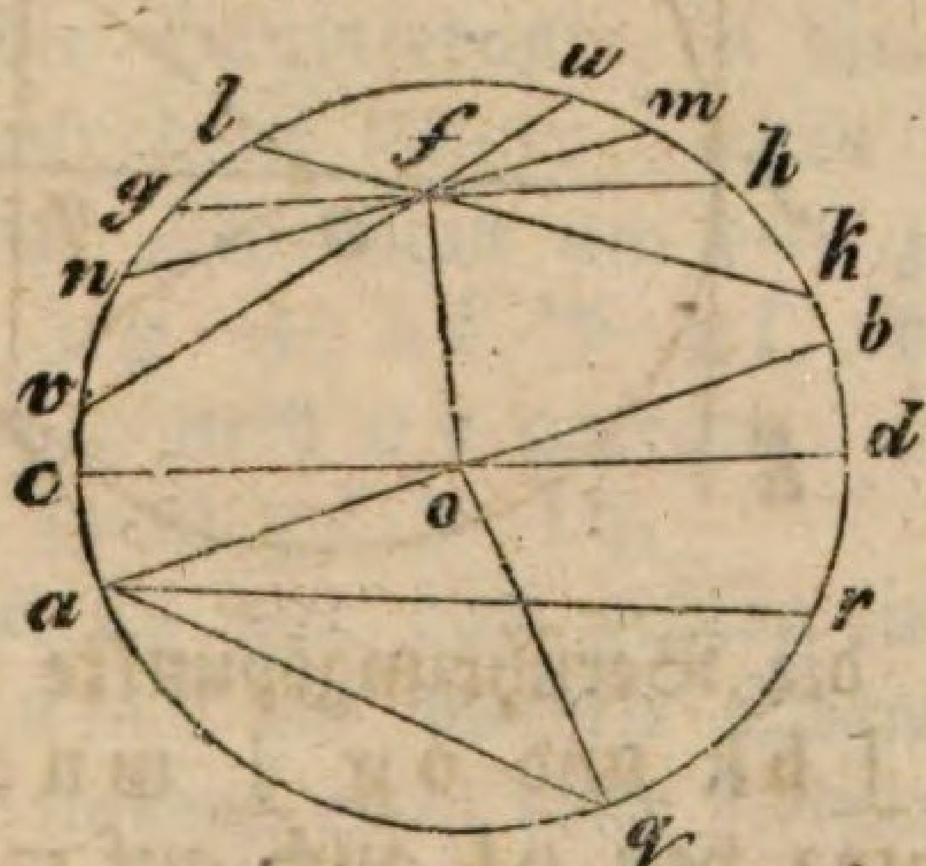


dete spitzige W. b a c gehört gewissermaßen hierher; denn auch er ist die Hälfte des entsprechenden Mittelpunkts-Winkels. Um dieß zu beweisen, ziehe man den Halbmesser a o und von o durch b die Gerade o c, so zeigt sich in dem bei a rechtwinkligen Dreiecke a o c, W. $m + n = o + c$; aber ist es der äußere Winkel $q = n + c$ und wegen $q = m$ wird $m = n + c$. Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung, so folgt $n + c + n = o + c$; oder $2. n + c = o + c$, oder $2. n = o$, daher W. $n = \frac{\text{W. O}}{2} = \frac{\text{W. } aob}{2}$ Ein solcher Winkel ist also eben so groß, wie ein Umfangswinkel, der dem durch die Sehne bestimmten Bogen entspricht. Hieraus folgt, daß Winkel der genannten Art gleich sind, wenn in demselben oder in gleichen Kreisen die durch die Sehnen bestimmten Bögen es sind.

§. 55. Eigenschaften der sich schneidenden Sehnen.

1) Sehnen wie (Fig. 79.) a b, und c d die sich im Centrum schneiden,

Fig. 79.



sind Durchmesser, halbiren sich wechselseitig und die Produkte ihrer dadurch sich ergebenden Segmente a o und b o, c o und d o sind gleich, und zwar, wenn der Radius r genannt wird, stets r^2.

2) Sehnen, wie g h und l k, die sich außerhalb des Centrums schneiden, können sich nicht wechselseitig halbiren; denn eine Gerade o f kann auf zwei sich schneidenden Linien g h und l k nicht senkrecht stehen;

aber ihre Segmente sind stets verkehrt proportionirt, nämlich gf : lf = fk ; fh. Um dieß zu beweisen, ziehe man gl und hk, so ist W. gfl = hfk als Scheitelwinkel, ferner W. lgh = lkh als Umfangswinkel, denen derselbe Bogen lh entspricht; folglich ist △ gfl ∼ △ hfk, woraus obige Proportion sich ergibt. Zieht man ferner durch f die Sehnen mn und uv, so zeigt sich auf gleiche Weise gf : nf = mf : fh und nf ; vf = fu ; mf und aus den aufgestellten Proportionen folgt daher lf . fk = gf . fh = nf . mf = vf : fu. Werden also durch einen Punkt f innerhalb des Kreises mehrere Sehnen gezogen, so sind die Produkte der dadurch in jeder Sehne entstehenden Segmente immer gleich. Diese Eigenschaft hat also jeder Punkt innerhalb des Kreises mit dem Centrum gemein.

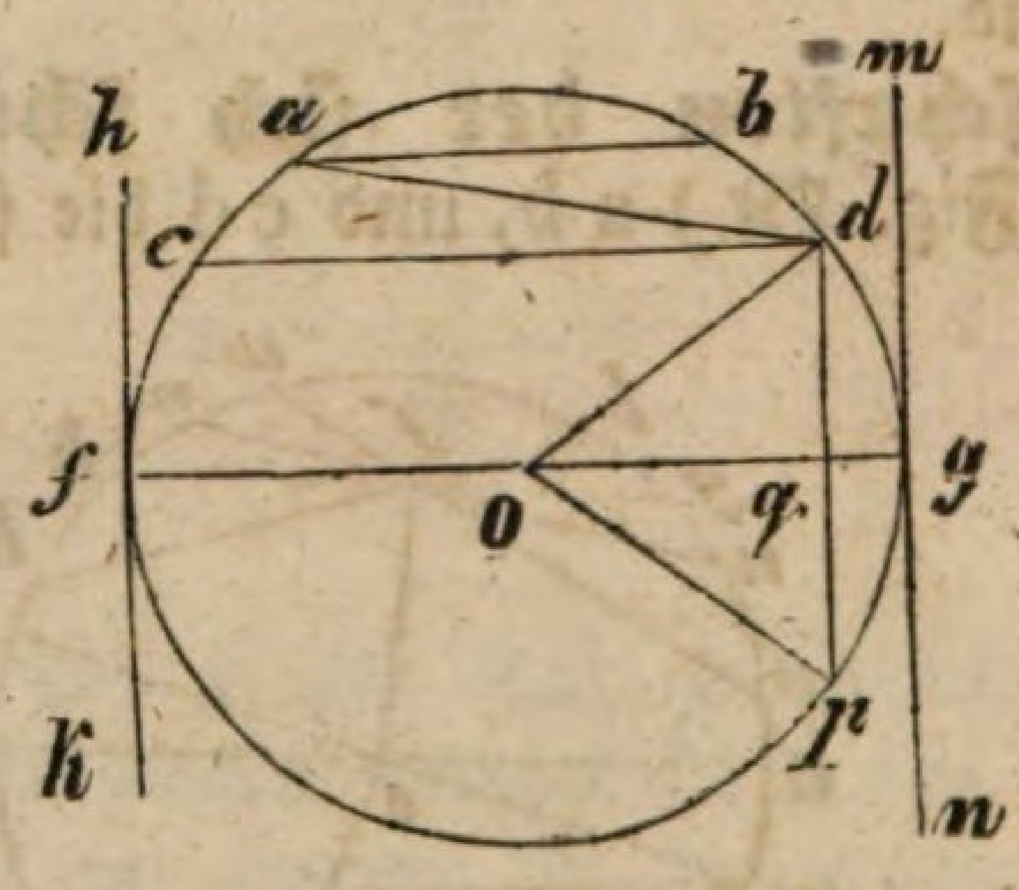
3) Werden von einem Endpunkte a eines Durchmessers ab die Sehnen ap und aq so gezogen, daß W. bap < W. baq sei, so muß jene ap die größere sein, welche den kleinern Winkel bap bildet. Denn nach §. 18. 3. findet man ap + oq > aq + op, also wegen oq = op auch ap > aq.

4) Wird vom Endpunkte (Fig. 69.) A eines Durchmessers AC eine Sehne AD und hierauf BD ⊥ AC gezogen, so findet die Proportion AB : AD = AD : AC statt. Mittelst der Sehne DC ergibt sich wegen des Winkels ADC im Halbkreise das rechtwinklige △ ADC, daher folgt nach §. 32. 1. obige Proportion.

§. 56. **Von den parallelen Sehnen und Tangenten.** Die zwischen parallelen Sehnen oder Tangenten, oder solchen Sehnen und Tangenten liegenden Bögen, sind gleich.

1) Es sei (Fig. 80.) ab ∥ cd und die Sehne ad gezogen, so muß W. bad = W. adc sein, und daher hat man nach §. 54. 4. Bogen ac = bd.

Fig. 80.

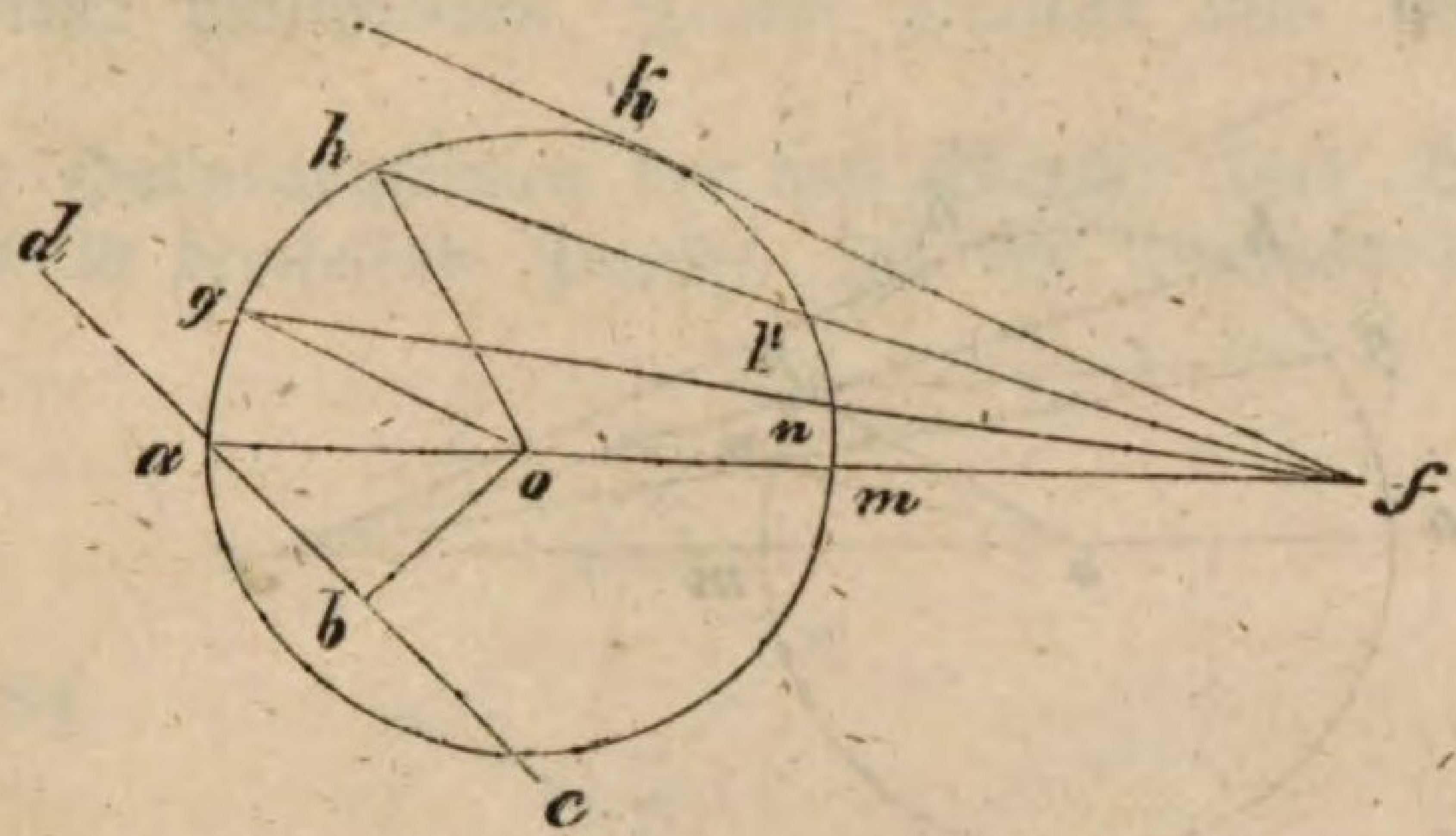


2) Sind f und g die Berührungspunkte der parallelen Tangenten hk und mn, so ist of ⊥ hk und og ⊥ mn; allein indem mn ∥ hk ist, muß die Verlängerung von of auch auf mn senkrecht stehen, und da ebenfalls og ⊥ mn ist, so muß jene Verlängerung die Lage og annehmen. Also sind f und g Endpunkte desselben Durchmessers fg, und daher die zwischen jenen parallelen Tangenten liegenden Bögen als Halbkreise gleich.

3) Es sei dp ∥ mn, so muß, da og ⊥ mn, auch og ⊥ dp, folglich dp = pq sein; nun ist aber △ doq ≅ △ poq, daher hat man W. dog = pog, somit Bogen dg = pg.

§. 57. **Von den Sekanten.** Sekante heißt jede Gerade (Fig. 81.) d b, welche Theile außerhalb und innerhalb des Kreises hat.

Fig. 81.



Sie entsteht, wenn man vom Endpunkte a eines Halbmessers a o auf diesen eine schiefe Gerade a d zieht, und diese über a verlängert. Denn ist W. d a o > R, so ist W. b a o < R, folglich muß die von o auf a d gezogene Senkrechte die Lage b o annehmen, und nun ist b o < a o, d. h. der Abstand des Punktes b vom Centrum ist kleiner als der Halbmesser, somit liegt b innerhalb des Kreises. Die Verlängerung von d a befindet sich also im Kreise, daher ist eine Sekante entstanden, und diese noch fernerhin verlängert, muß mit der Kreislinie noch in einem zweiten Punkte c zusammentreffen. Da der W. b a o < R ist, so ergibt sich dasselbe Resultat, wenn a d unter einem spitzigen Winkel auf a o gezogen wird. In solchen Sekanten wie f a, f g, f h, die von einem gemeinschaftlichen Punkte f gezogen sind, wollen wir die ihnen entsprechenden Sehnen a m, g n, h p innere Segmente und die Abstände jenes Punktes f von den ersten Durchschnittspunkten m, n, p, nämlich f m, f n, f p äußere Segmente nennen; ferner werde die durch das Centrum gehende Sekante f a Hauptsekante genannt, während die andern f g, f h Nebensekanten heißen sollen, und nun ergeben sich folgende Sätze:

1) Unter allen Sekanten, die von einem Punkte f zum Kreise gezogen werden können, ist die Hauptsekante f a die längste, die Nebensekanten f g, f h werden aber desto kleiner, einen je größeren Winkel sie mit der Hauptsekante bilden. Zieht man um dieß zu beweisen den Halbmesser g o, so ergibt sich o g + o f > g f, oder wegen g o = a o auch a f > g f. Wird ferner noch o h gezogen, so folgt nach §. 18. 3. h o + g f > g o + f h, somit g f > f h.

2) Die Hauptsekante f a hat das größte innere Segment, es ist nämlich der Durchmesser a m; die inneren Segmente g n und h p der Nebensekanten f g und f h werden aber desto kleiner, je größer der Winkel ist, den die entsprechenden Sekanten mit der Hauptsekante bilden; denn sie sind Sehnen, die stets größere Abstände vom Centrum haben. Je kleiner das innere Segment h p wird, desto mehr nähert sich die Sekante f h der Tangente f k, und erstere geht in letztere über, wenn h p verschwindet; also kann die Tangente als eine Sekante betrachtet werden, deren inneres Segment Null ist.

3) Die Hauptsekante (Fig. 82.) f a hat das kleinste äußere Segment f m, jene f n und f p der Nebensekanten aber werden größer,

wenn der Winkel, den die letztern mit der Hauptsekante bilden, wächst; denn es ist fm + om < fn + on < pf + op, somit auch fm < fn < fp.

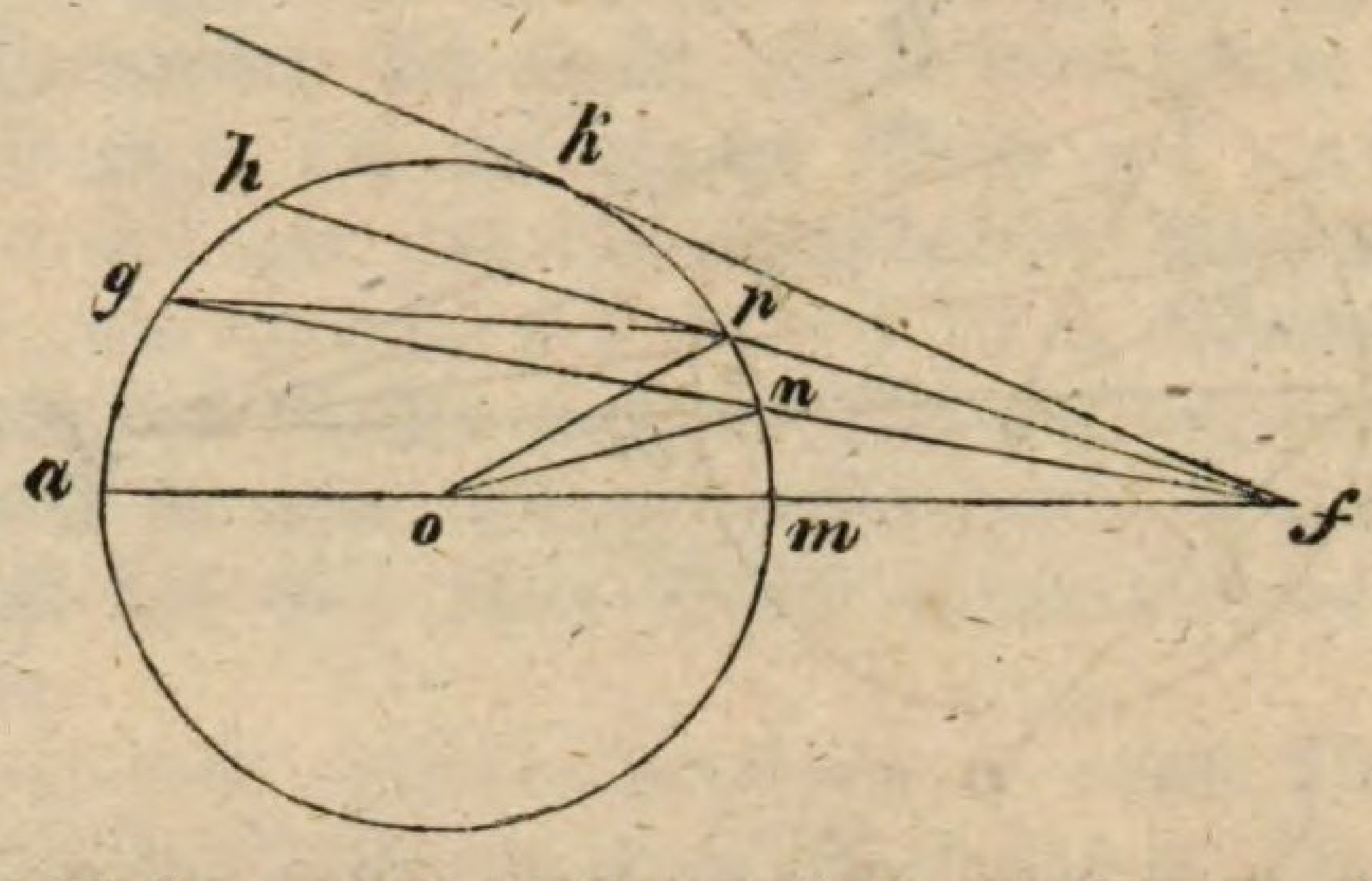


Fig. 82.

4) Zwei Sekanten sind ihren äußern Segmenten verkehrt proportionirt, nämlich hf : fn = fg : fp; denn zieht man die Sehnen hn und pg, so haben die Dreiecke hfn und gfp den Winkel bei f gemeinschaftlich; ferner ist nach §. 54. 4. der W. phn = pgn, daher das △ hfn ∼ △ gfp, woraus obige Proportion folgt. Rücksichtlich der Sekanten fa und fg findet man auf gleiche Weise fg : fm = fa : fn. Aus den aufgestellten Proportionen ergibt sich nun fa . fm = fg . fn = fh . fp. Zieht man also von demselben Punkte f außerhalb des Kreises zu diesem mehrere Sekanten, so sind die Produkte derselben mit ihren äußern Segmenten stets gleich. Dieser Satz ist offenbar dem in §. 55. 2. von den durch f gezogenen Sehnen aufgestellten analog.

5) Läßt man in der Gleichung fg . fn = fh . fp die Sekante fh in die Tangente fk übergehen; so wird fh = fp = fk, daher ergibt sich fg . fn = fk² oder fg : fk = fk : fn, d. h. die Tangente ist die mittlere Proportionale zwischen der Sekante und ihrem äußern Segmente.

§. 58. Eigenschaften des Dreiecks und Vierecks.

1) Die von den Mittelpunkten der drei Seiten eines Dreiecks auf sie gezogenen Senkrechten schneiden sich in demselben Punkte. Es sei im Dreiecke (Fig. 83) abc, ad = bd und do ⊥ ab, ferner af = cf,

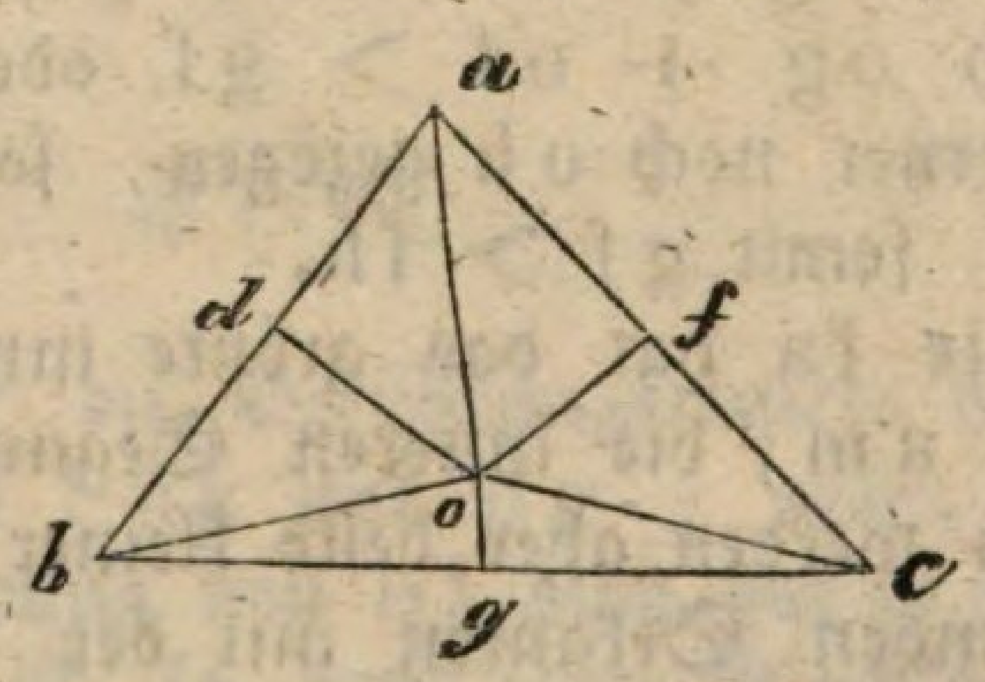


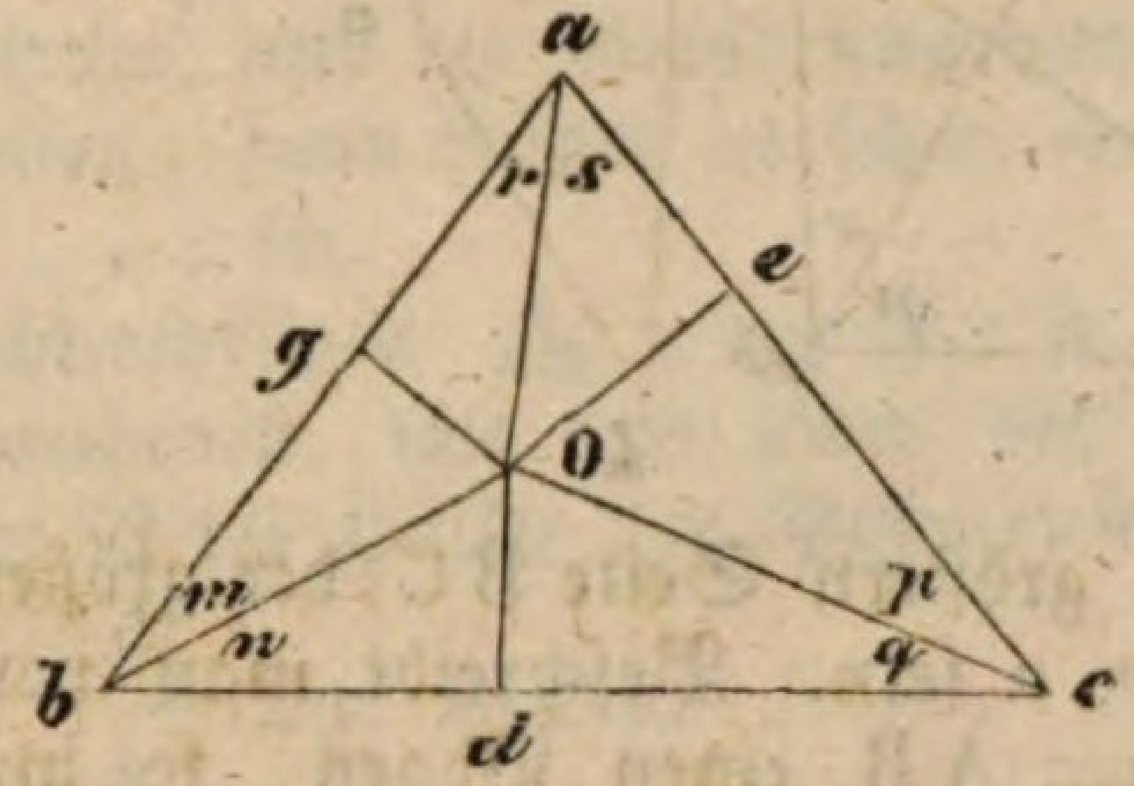
Fig. 83.

und of ⊥ ac; verbindet man nun den Punkt o, in welchem sich jene Senkrechten nach §. 23. nothwendig schneiden, mit dem Mittelpunkte g der Seite bc, so muß go ⊥ bc sein. Zieht man, um dieß zu beweisen, oc und ao, so ist nach §. 10. 2. △ aof ≅ cof, somit ao = co, und wird noch bo gezogen, so zeigt sich eben so ao = bo; daher ist auch bo = co, somit △ bog ≅ cog, also W. bgo = cgo, d. h. og ⊥ bc. Beschreibt man von o als Centrum mit dem Ra-

dius a o einen Kreis, so geht dieser durch die Punkte a, b und c; daher werden die Seiten Sehnen des Kreises, und man sagt, der Kreis sei dem Dreiecke umschrieben. Jedem Dreiecke läßt sich also ein Kreis umschreiben.

2) Die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich ebenfalls in demselben Punkte. Ist im Dreiecke (Fig. 84.) a b c

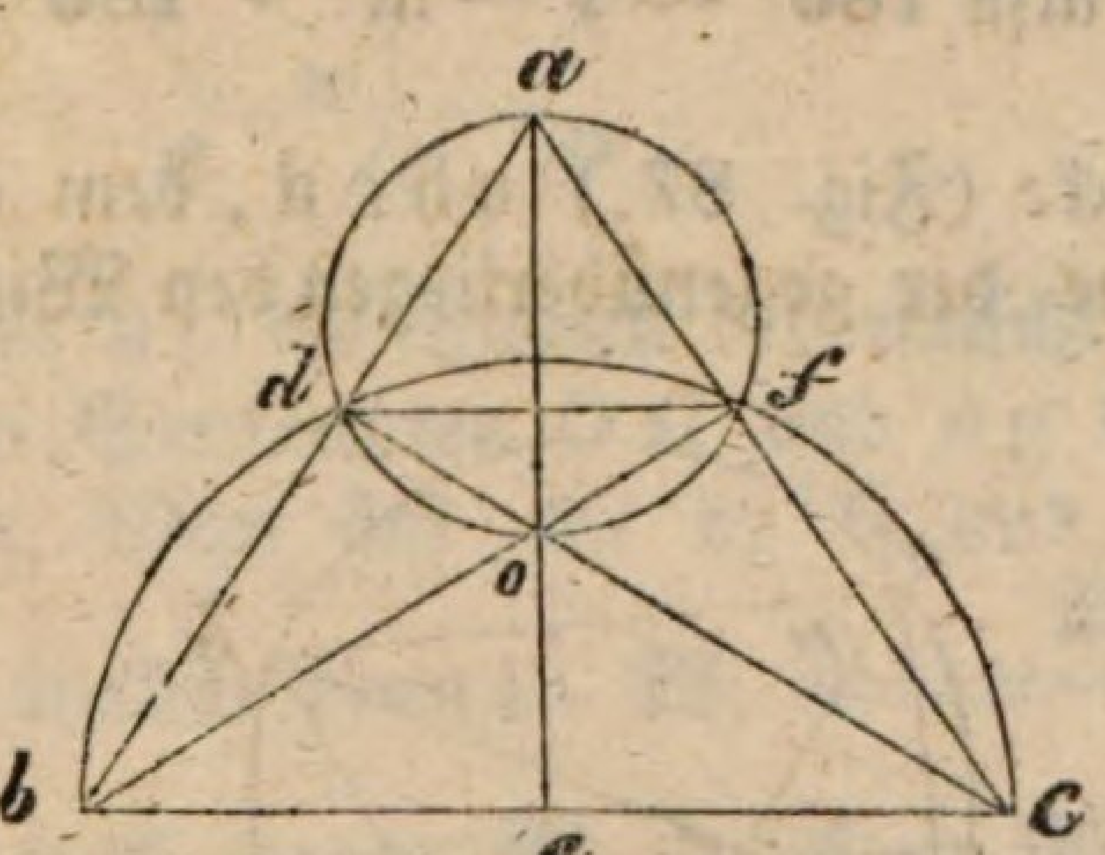
Fig. 84.



der W. p = q und W. m = n, und man verbindet den Durchschnittspunkt o mit a, so muß W. r = s sein. Beweis. Man ziehe o d $\perp$ b c und o e $\perp$ a c, so ist nach §. 19. 3. $\triangle$ d o c $\cong$ e o c, also d o = o e, und wenn o g $\perp$ a b ist, so findet man eben so d o = o g, daher muß auch o g = o e sein. Nun ist aber nach §. 19. 2. $\triangle$ a g o $\cong$ a e o, somit r = s. Der von o als Centrum mit dem Radius d o beschriebene Kreis muß, unserer Betrachtung gemäß, die Seiten des Dreieckes in g, d und e berühren, und wird der dem Dreiecke eingeschriebene genannt. Jedem Dreiecke kann also ein Kreis eingeschrieben werden, und es ist auch zugleich bekannt, wie dieser gefunden wird.

3) Die von den Scheiteln der drei Winkel eines Dreiecks auf die Gegenseiten gefällten Senkrechten schneiden sich endlich auch in demselben Punkte. Es sei (Fig. 85.) d c $\perp$ a b und b f $\perp$ a c, so muß

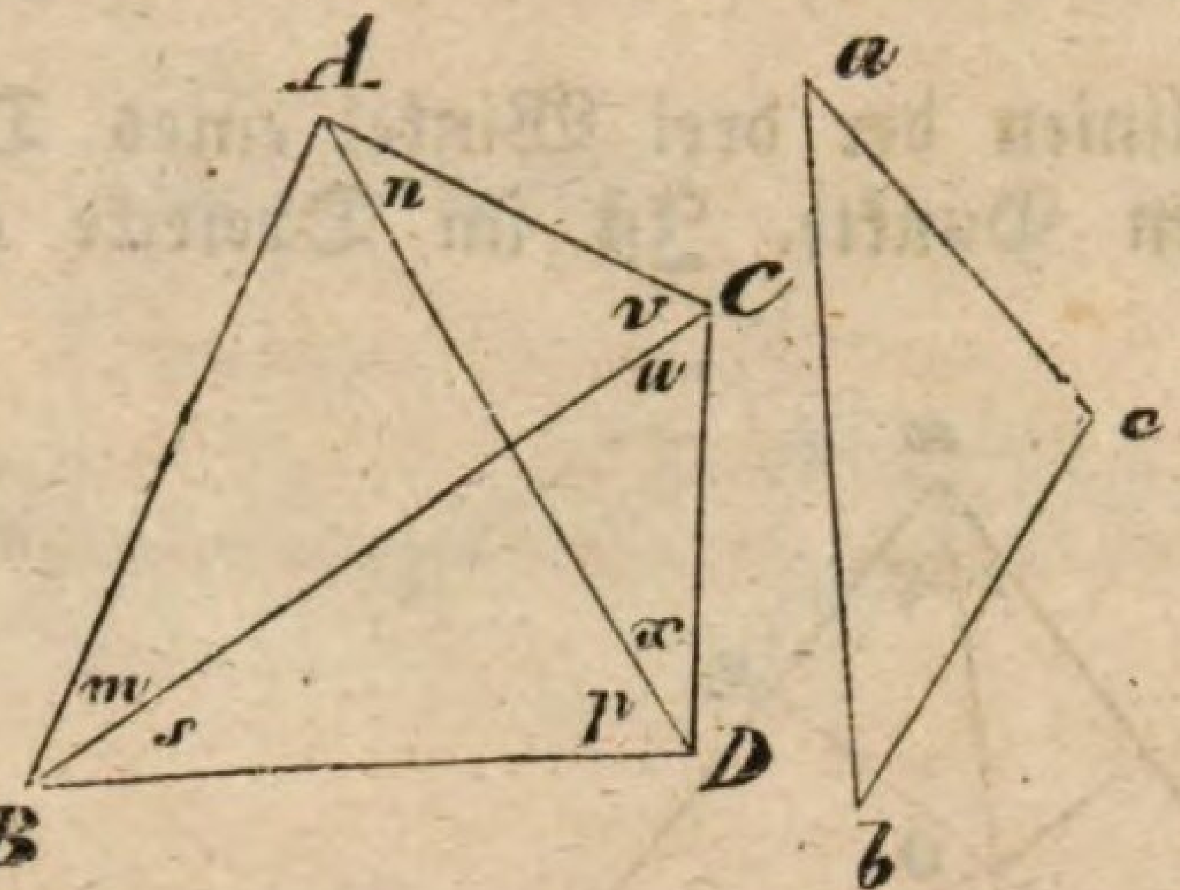
Fig. 85.



die von a durch o gezogene Gerade a e $\perp$ b c sein. Um dieß zu beweisen, zeichne man über die gemeinschaftliche Hypothenuse b c der beiden rechtwinkligen Dreiecke b d c und b f c als Durchmesser einen Halbkreis, so wird dieser nach §. 47. 1. durch d und f gehen; und auf gleiche Weise geht auch der über a o als Durchmesser beschriebene Kreis durch d und f. Nun ziehe man d f und vergleiche die Dreiecke b d c und a b e miteinander, so zeigt sich W. d b c = W. a b e und nach §. 51. 4. W. b c d = b f d = o f d = d a o = b a e, somit auch W. b d c = b e a; allein es ist W. b d c = R, also auch W. b e a = R.

4) Haben zwei Dreiecke (Fig. 86.) ABC und abc zwei Seiten wechselweise gleich $AB = ab$, $AC = ac$, die dritten aber ungleich

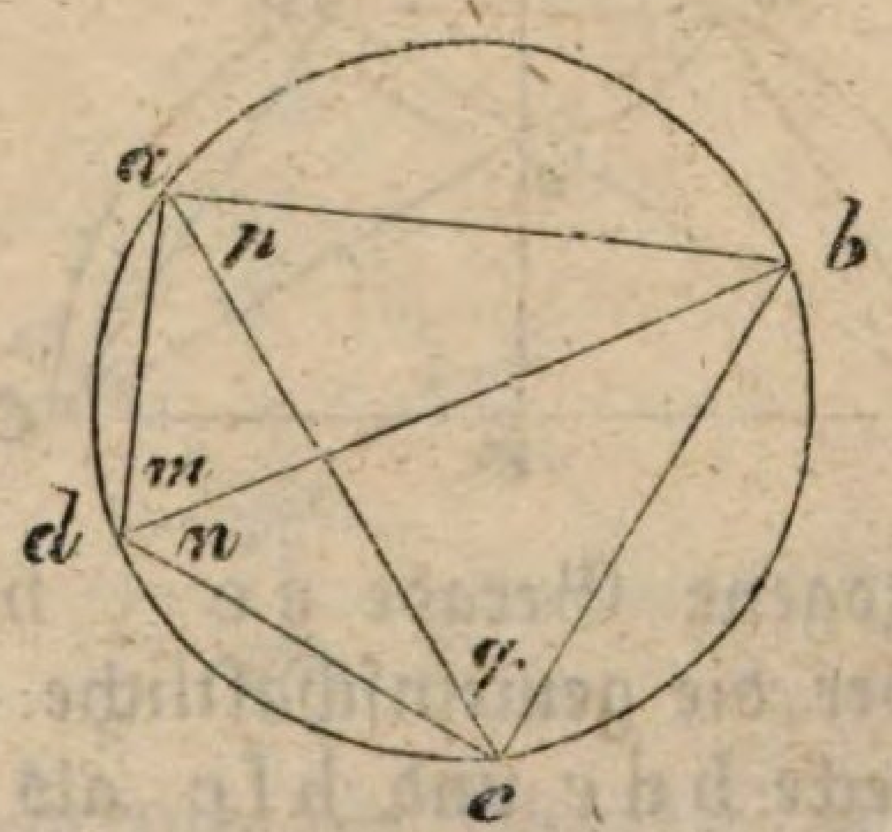
Fig. 86.



$BC > bc$; so muß der größern Seite BC der größere Winkel gegenüberliegen, nämlich $A > a$ sein. Beschreibt man von A als Centrum mit dem Halbmesser $ab = AB$ einen Bogen, so muß dieser durch B gehen; wird ferner von C mit dem Radius bc ein zweiter Bogen beschrieben, so muß dieser, wie aus §. 52. 2. leicht einzusehen ist, den frühern in D schneiden. Zieht man nun die Geraden AD und CD, so folgt $AD = ab$, $DC = bc$, und vermöge der Voraussetzung auch $AC = ac$; somit ist $\triangle ADC \cong \triangle abc$, daher W. $n = a$. Aus den Dreiecken ABC und ADC ergibt sich W. $BAC = 180^0 - v - m$ und $n = a = 180^0 - v - (u + x)$, und wird die Sehne BD gezogen, so hat man aus dem $\triangle BDC$, $u + x = 180^0 - s - p$. Nun ist im gleichschenkligen $\triangle ABD$ $m + s = p$, daher $s = p - m$, und durch Substitution dieses Werthes erhält man $u + x = 180^0 - (p - m) - p$ oder $u + x = 180^0 - 2p + m = 2(90^0 - p) + m$ also $u + x - m = 2(90^0 - p)$. Es ist aber im gleichschenkligen $\triangle ABD$ W. $p < 90^0$, somit die Differenz $u + x - m$ positiv, demnach $u + x > m$, also $180^0 - v - m > 180^0 - v - (u + x)$ oder W. $BAC > a$.

5) In jedem Vierecke (Fig. 87.) abcd, dem ein Kreis umschrieben ist, muß die Summe der gegenüberliegenden Winkel $abc + adc$

Fig. 87.



$= 2R$ sein. Zieht man die Diagonale ac, so hat man W. $abc + p + q = 2R$, und mittelst der Diagonale bd ergibt sich $p = n$, und $q = m$, somit auch W. $abc + n + m = 2R$, oder W. $abc + adc = 2R$.

§. 59. Eigenschaften der regulären Polygone.

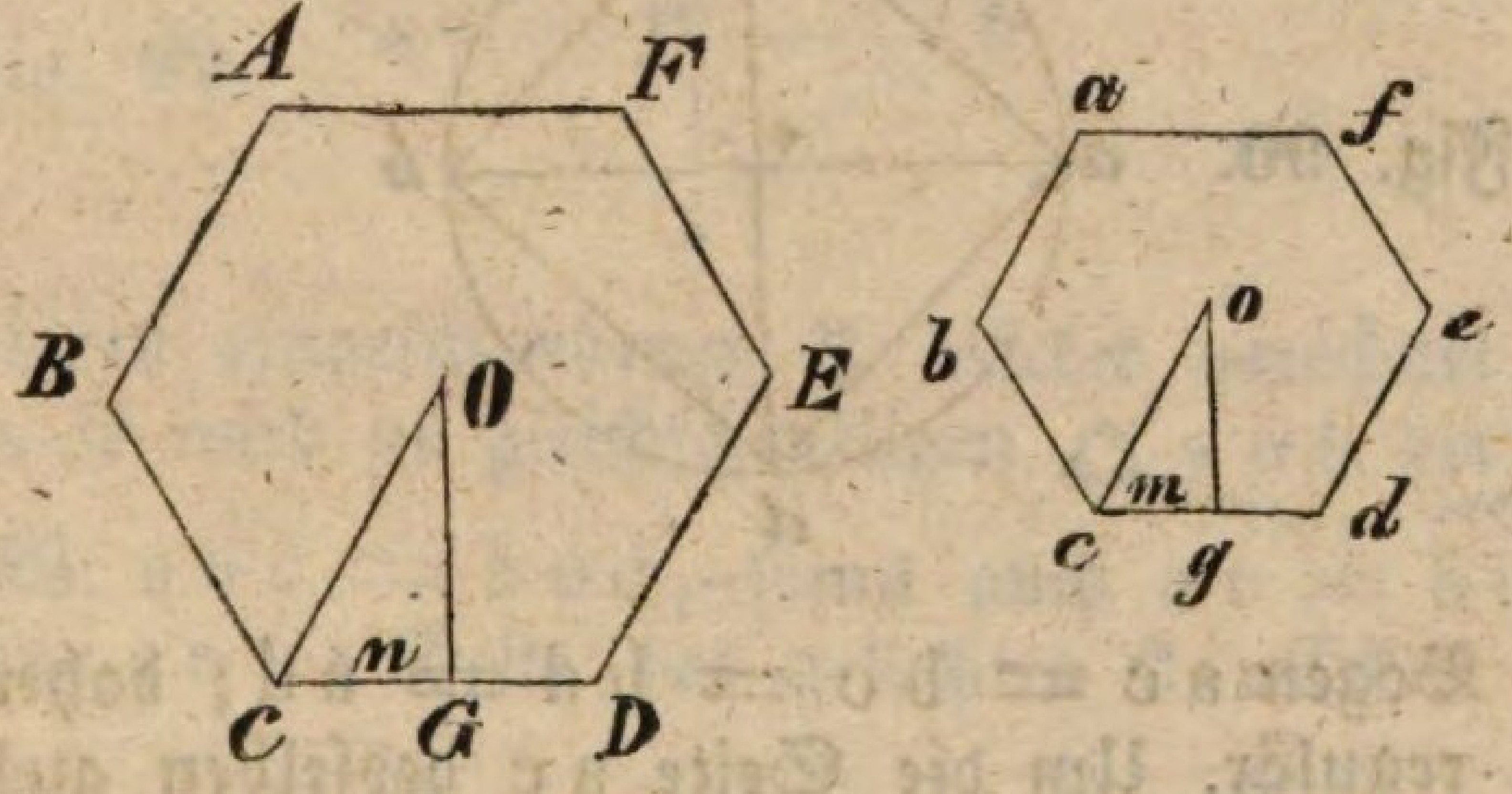
1) Da der Mittelpunkt o (Fig. 52.) des regulären Polygons von den Scheiteln der W. a, b, c . . . nach §. 30. gleich weit absteht, so

muß der von o als Centrum mit dem Halbmesser a o beschriebene Kreis durch die genannten Punkte gehen; also kann man jedem regulären Polygone einen Kreis umschreiben. Allein es sind auch die von o auf die Seiten c d, d e, e f, . . . gezogenen Senkrechten o g, o h, o k, ... ebenfalls gleich; daher muß der von o als Centrum mit dem Radius o g beschriebene Kreis jene Seiten in den Punkten g, h, k, . . . berühren. Jedem regulären Polygone kann man also auch einen Kreis einschreiben, dieser ist mit dem umschriebenen konzentrisch, d. h. hat mit ihm dasselbe Centrum, und die Berührungspunkte sind zugleich die Mittelpunkte der Seiten; denn früher ist schon erwiesen worden, daß c g = d g, d h = e h . . . sei.

2) Im rechtwinkligen △ c o g ist c o der Halbmesser des dem Polygone umschriebenen und g o jener des demselben eingeschriebenen Kreises, g c aber ist die Hälfte der Polygonseite c d. Nun findet man $co^2 = go^2 + \frac{cd^2}{4}$ und hieraus folgt, daß jede der drei Größen c o, g o und d c berechnet werden kann, wenn die beiden andern als gegeben betrachtet werden.

3) Die Umfänge regulärer Polygone von gleich viel Seiten sind den Radien der umschriebenen und eingeschriebenen Kreise proportionirt. Es seien (Fig. 88.) A D und a d zwei nseitige reguläre Polygone, die daher nach §. 44. 2. auch ähnlich sind, und O und o ihre Mittelpunkte;

Fig. 88.

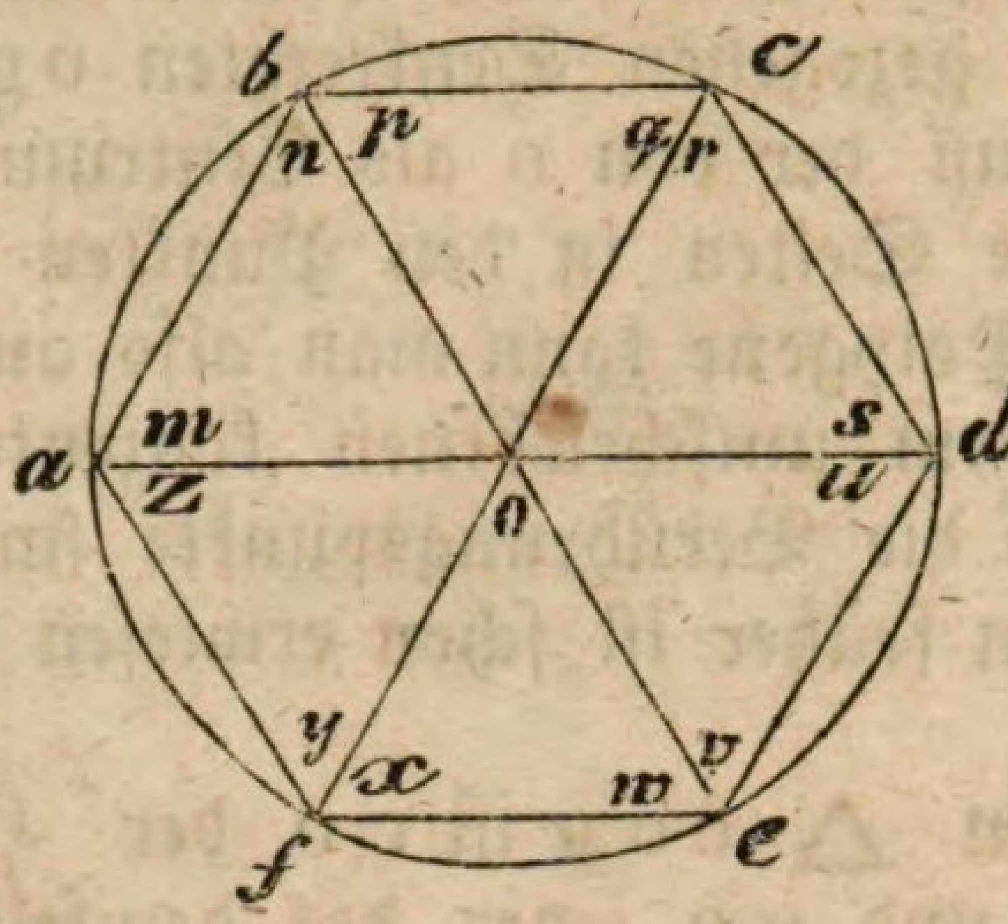


so müssen O C und o c die Radien der umschriebenen, und die auf C D und c d gezogenen Senkrechten O G und o g die Radien der eingeschriebenen Kreise sein. Nun sind die in G und g rechtwinkligen Dreiecke C O G und c o g ähnlich, denn da W. m $= \frac{\text{W. } bcd}{2}$ und W. n $= \frac{\text{W. } BCD}{2}$ ist, so muß wegen W. b c d = W. B C D auch W. m = n sein. Daher erhält man G C : g c = C O : c o = G O : g o, folglich auch n . 2 G C : n . 2 g c = C O : c o = G O : g o. Allein es ist 2 G C = C D und 2 g c = c d; somit ergibt sich n . C D : n . c d = C O : c o = G O : g o.

§. 60. **Auflösung spezieller Probleme.** Bevor wir zur Auflösung besonderer Probleme schreiten, wollen wir noch folgenden Lehrsatz erweisen. Wird die Kreislinie in n gleiche Theile getheilt, so entsteht durch die denselben entsprechenden Sehnen ein nseitiges reguläres Poly-

gon. Gesetzt es sei der Kreis, dessen Mittelpunkt o (Fig. 89.) sein soll, in sechs gleiche Theile getheilt, also $\overset{\frown}{ab} = \overset{\frown}{bc} = \overset{\frown}{cd} = \ldots$ so ist

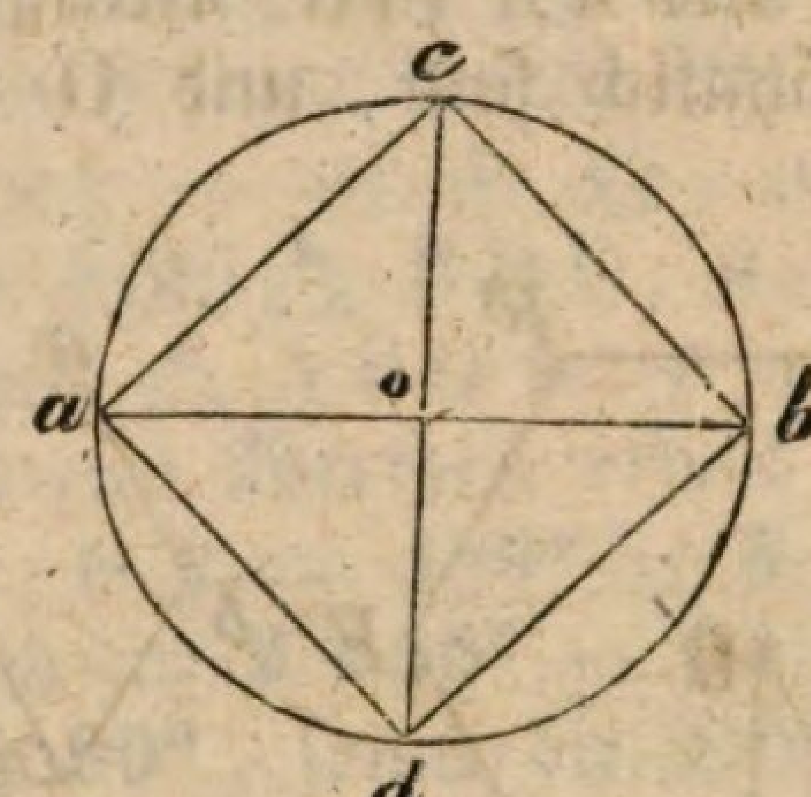
Fig. 89.



nach §. 6. die Sehne $ab = bc = cd = \ldots$ und daher sind die Dreiecke aob, boc, cod, ... kongruent und gleichschenklig; folglich W. $m = n = p = q = r = s = \ldots$ Daher auch $m + z = n + p = q + r = \ldots$ oder W. $a = b = c \ldots$, das Polygon ace ist also gleichseitig und gleichwinklig, also regulär.

1) Dem Kreise ein reguläres Viereck einzuschreiben. Man ziehe den Durchmesser (Fig. 90.) $cd \perp ab$ und hierauf die Sehnen ac, bc, bd und ad; so ist wegen der Gleichheit der W. aoc, boc, bod und

Fig. 90.

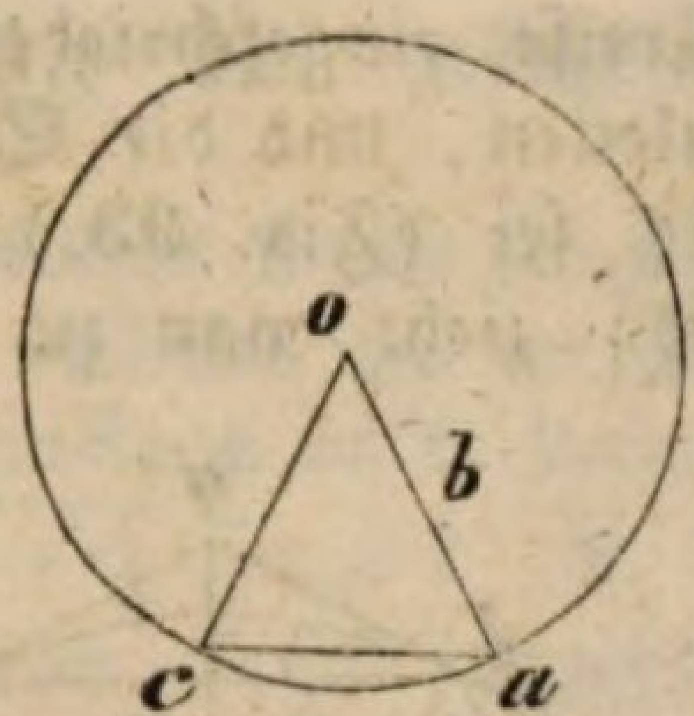


aod auch der Bogen $ac = bc = bd = ad$; daher das gefundene Viereck $acbd$ regulär. Um die Seite ac desselben aus dem gegebenen Radius $ao = r$ zu berechnen, findet man mittelst des pythagorischen Lehrsatzes $ac^2 = ao^2 + oc^2$ oder $ac^2 = 2r^2$, folglich $ac = r\sqrt{2}$.

2) Dem Kreise ein reguläres 6Eck einzuschreiben. Man trage den Radius ao (Fig. 89.) so oft als möglich als Sehne ein, so wird dieß genau sechsmal geschehen können. Denn konstruirt man über ao das gleichseitige $\triangle\, abo$, so ist der W. $aob = \frac{2R}{3}$, oder W. $aob = \frac{4R}{6}$, also der sechste Theil der Summe aller um o möglichen Winkel; folglich ist der Bogen ab auch $\frac{1}{6}$ der ganzen Kreislinie, also die Sehne ab die Seite des regulären 6Eckes. Zieht man die Sehnen bd, bf und fd, so entsteht dadurch das reguläre dem Kreise eingeschriebene Dreieck.

3) Dem Kreise ein reguläres 10Eck einzuschreiben. Man trage das größere Segment (Fig. 91.) bo des nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilten Halbmessers ao als Sehne ac ein, so ist diese die Seite des verlangten Polygons. Denn zieht man oc, so ergibt sich

Fig. 91.

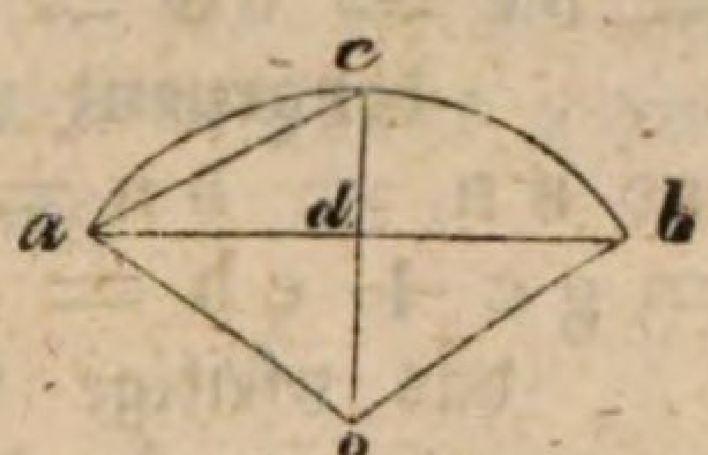


das gleichschenklige $\triangle$ a o c, in welchem W. a = c = 2 W. o, daher wird, wegen $a + c + o = 2R$, auch 2 W. $o + 2$ W. $o +$ W. $o = 2R$ oder 5 W. $o = 2R$, somit W. $o = \frac{2R}{5} = \frac{4R}{10}$, also die Sehne a c die 10Eckseite. Da die Proportion $ab : bo = bo : ao$ oder $ab : ac = ac : ao$ stattfindet, so läßt sich die Seite a c aus dem Radius berechnen; denn setzt man $ac = x$ und $ao = r$, so ergibt sich $r - x : x = x : r$, folglich $x = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5}.)$

§. 61. Auflösung allgemeiner Probleme.

1) Die Seite (Fig. 92.) a b des einem Kreise eingeschriebenen regulären nEckes sei nebst dem Halbmesser gegeben, und daraus soll die

Fig. 92.



Seite des regulären eingeschriebenen 2 nEckes berechnet werden. Zieht man $oc \perp ab$, so wird im gleichschenkligen $\triangle$ a o b der W. a o b halbirt, daher ist W. $aoc = boc$, somit auch $\overset{\frown}{ac} = \overset{\frown}{bc}$, folglich nach §. 60. die Sehne a c die Seite des gesuchten 2 nEckes. Um nun diese zu berechnen, wollen wir $ab = a$, daher $ad = \frac{a}{2}$ und $ao = r$ setzen, so erhält man aus dem rechtwinkligen $\triangle$ a o d, $od^2 = ao^2 - ad^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}$, somit $do = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$, also $dc = oc - od = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$; das $\triangle$ a d c gibt nun $ac^2 = ad^2 + dc^2$, oder durch Substitution der für a d und d c gefundenen Werthe $ac = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$

2) Aus der Seite des dem Kreise eingeschriebenen 2 nEckes $ac = \beta$, jene a des nEckes zu bestimmen. Um diese Aufgabe aufzulösen, braucht man nur aus der Gleichung $\beta = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$ die Größe a durch r und β auszudrücken; daher findet man $a = \frac{\beta}{r}\sqrt{4r^2 - \beta^2}$.

3) Aus dem einem Kreise eingeschriebenen regulären nEcke das demselben umschriebene abzuleiten, und die Seite des letztern aus jener des erstern zu berechnen. Es sei (Fig. 93.) abcdef das dem Kreise eingeschriebene reguläre nEck; zieht man zu a, b, c, d, e und f die

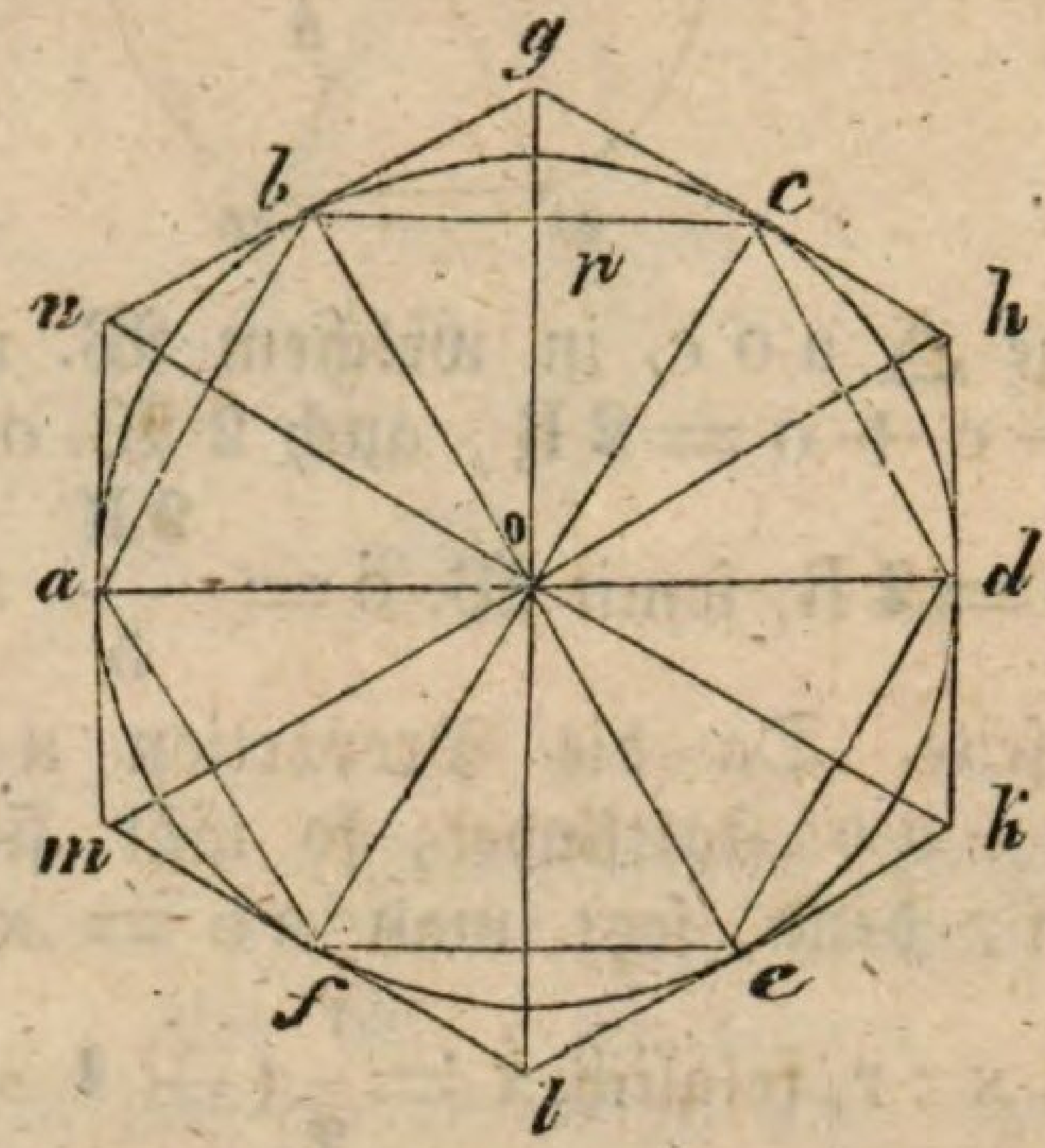


Fig. 93.

Tangenten mn, ng, gh, hk, kl und ml, so entsteht das verlangte umschriebene nEck. Beweis. Da der Bogen ab = bc = cd = ... ist, so ist nach §. 54. 5. W. nab = nba = gbc = ...; es ist aber auch die Seite ab = bc = cd = ..., folglich sind die Dreiecke nab, gbc, hcd, ... kongruent und gleichschenklig, daher W. n = g = h = ... und an = bn = bg = gc = ..., also ist auch nb + bg = gc + ch = dh + dk = ... oder ng = gh = hk = ... das nseitige Polygon nghk ... ist also regulär. Zieht man bo, go und co, so folgt aus den kongruenten Dreiecken bgo und cgo, daß W. bgo = cgo, also pg ⊥ bc, daher $pc = \frac{bc}{2}$ sei. Nun wollen wir co = r und bc = a, somit $pc = \frac{a}{2}$ setzen, und po aus dem △ poc berechnen, so findet man $po^2 = oc^2 - pc^2$, folglich $po = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$ Das △ opc ∾ ogc, denn es ist W. poc = goc, und W. opc = gco = R, somit ergibt sich die Proportion op : pc = oc : gc oder $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} : \frac{a}{2} = r : gc$, und hieraus $gc = \frac{ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$, folglich $gh = 2gc = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$

4) Hat man endlich aus der Seite gh = a des umschriebenen nEckes jene bc = a des eingeschriebenen zu berechnen, so braucht man nur aus der Gleichung $a = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$ den Werth von a zu bestimmen, und es ergibt sich $a = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 + a^2}} = bc$.

§. 62. Anwendung der allgemeinen Probleme auf Beispiele.

1) Aus der Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären 6Eckes jene des eingeschriebenen 12Eckes zu berechnen. Man setze in dem im §. 61. 1. entwickelten Ausdrucke $a = r$, so ergibt sich für die gesuchte Seite $\sqrt{(2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2})} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

2) Die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären 8Eckes aus jener des eingeschriebenen 4Eckes abzuleiten. Für diesen Fall hat man im genannten Ausdrucke $a = r\sqrt{2}$ zu setzen, und daher findet man $\sqrt{(2r^2 - r\sqrt{4r^2 - 2r^2})} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

3) Aus der Seite des dem Kreise eigeschriebenen regulären 6Eckes jene des eingeschriebenen 3Eckes zu bestimmen. Wird in der im §. 61. 2. entwickelten Formel $\beta = r$ gesetzt, so folgt für die verlangte Seite der Werth $a = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$.

4) Es sei die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären Dreieckes $r\sqrt{3}$ gegeben, und hieraus jene des umschriebenen zu berechnen. Setzt man in der im §. 61. 3. für gh gefundenen Gleichung statt a den obigen Werth, so ergibt sich für die gesuchte Seite $\dfrac{2r \cdot r\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}} = 2r\sqrt{3}$.

5) Wenn die Seite des dem Kreise umschriebenen regulären 4Eckes aus jener des eingeschriebenen berechnet werden soll, so hat man in der früher genannten Gleichung $a = r\sqrt{2}$ zu setzen, wodurch man $\dfrac{2r \cdot r\sqrt{2}}{\sqrt{4r^2 - 2r^2}} = 2r$ erhält.

6) Aus der Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären 10Eckes jene des eingeschriebenen 5Eckes zu berechnen. Man setze in der im §. 61. 2. entwickelten Formel vermöge §. 60. 3. $\beta = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$, so folgt die gesuchte Seite $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(-1 + \sqrt{5})^2}$, woraus nach gehöriger Reduktion $\alpha = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ sich ergibt.

§. 63. Rektifikation und Quadratur des Kreises.

1) Der Kreis kann als ein unendlich eckiges, reguläres Polygon betrachtet werden. Es sei abcdef (Fig. 94.) das dem Kreise eingeschriebene reguläre 6Eck und agbhck... das hieraus nach §. 61. 1. abgeleitete eingeschriebene 12Eck; so ist $ag + bg > ab$, $bh + bc > bc$ u. s. w. Daher hat das letztere Polygon einen größern Umfang als das erstere. Eben so zeigt sich, daß, wenn die Seitenanzahl des dem Kreise eingeschriebenen regulären nEckes nach der Progression n, $2n$, $4n$, $8n$ wächst, der Umfang desselben stets zunehmen muß. Aber immer ist der Umfang des Kreises größer, als jener des eingeschriebenen Polygons; daher muß das Wachsen des Poly=

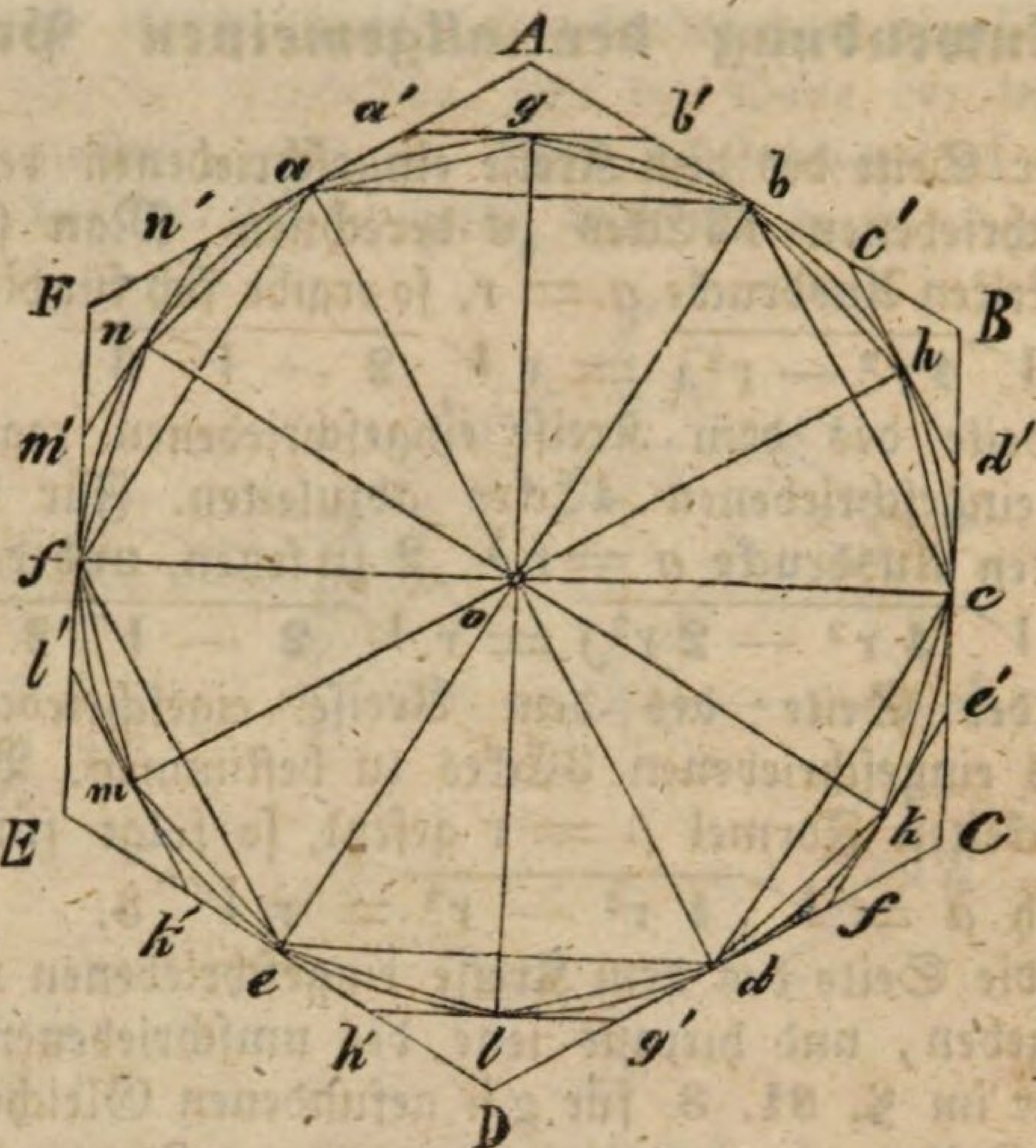


Fig. 94.

gon-Umfangs an eine Grenze gebunden sein. Diese Grenze ist der Kreis selbst, und sie wird erreicht, wenn die Seitenzahl unendlich groß wird. Leitet man aus den beiden frühern Polygonen nach §. 61. 3. das dem Kreise umschriebene reguläre 6Eck A B C D E F und das 12Eck a, b, c, d, e, .. ab; so ist offenbar Aa, + Ab, > a, b,; Bc, + Bd, > c, d, u. s. w.; also muß das letztere Polygon einen kleinern Umfang als das erstere haben. Wenn daher die Seitenanzahl des dem Kreise umschriebenen regulären n Eckes nach obiger Progression wächst, so muß dessen Umfang stets abnehmen, dabei aber immer größer bleiben als jener des Kreises. Diese Abnahme hat also auch eine Grenze, sie ist der Kreis selbst, und das betrachtete Polygon geht in diesen über, wenn dessen Seitenanzahl unendlich groß wird.

2) Das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser ist konstant. Kreise sind offenbar ähnliche Figuren, denn sie unterscheiden sich bloß durch ihre Größe voneinander; daher können sie als ähnliche, unendlicheckige, reguläre Polygone betrachtet werden. Aber die Umfänge ähnlicher regulärer Polygone verhalten sich nach §. 59. 3. wie die Durchmesser der umschriebenen und eingeschriebenen Kreise; daher müssen auch die Peripherien P und p zweier Kreise ihren Durchmessern D und d proportionirt sein; man hat also $P : D = p : d$, das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser ist also in allen Kreisen eine und dieselbe Größe, und da der Quotient desselben allgemein mit π bezeichnet wird; so ergibt sich $\frac{p}{d} = \pi$. Betrachtet man p als die Peripherie eines Kreises, dessen Radius $= 1$ ist, so muß $d = 2$ sein, und daher wird $\pi = \frac{p}{2}$ Die Größe π ist also auch der halbe Umfang eines Kreises, dessen Radius $= 1$ ist.

3) Numerischer Werth von π. Um den numerischen Werth der Größe π, welche auch die Ludolphische Zahl genannt wird, zu bestimmen, verfahre man auf folgende Art. Man setze in der im §. 61. 1 für die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären 2 nEckes gefundenen Gleichung $r = 1$, um sie auf einen Kreis, dessen Radius die Einheit ist, zu beziehen, so folgt $\sqrt{2 - \sqrt{4 - \alpha^2}}$, wo α die nEcksseite vorstellt. Wird nun statt α der in §. 62. 1. für die 12Eckseite gefundene Werth $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ substituirt; so ergibt sich für die Seite des eingeschriebenen 24 Eckes der Ausdruck $\sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$. Substituirt man den eben gefundenen Werth statt α neuerdings, so ergibt sich für die Seite des eingeschriebenen 48 Eckes $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$. Mittelst dieses Ausdrucks erhält man ferner für die Seite des 96Ecks $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$ und fährt man auf diese Art fort, so wird man wegen der Progression 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, 6144, 12288 endlich auf die Seite des dem Kreise eingeschriebenen 12288Ecks gelangen, welche den numerischen Werth 0.00051132694 gibt, daher der Umfang dieses Polygons $12288 \times 0.00051132694 = 6.28318524$ ist. Setzt man nun in dem im §. 61. 3. für die Seite des dem Kreise umschriebenen regulären nEckes gefundenen Ausdruck $\frac{2\,a\,r}{\sqrt{4\,r^2 - a^2}}$, $r = 1$ und $a = 0.00051132694$, und multiplizirt das erhaltene Resultat mit 12288, so ergibt sich für den Umfang des dem Kreise umschriebenen 12288Eckes in den 6 ersten Dezimalstellen genau derselbe Werth, welcher oben für das eingeschriebene 12288Eck gefunden wurde. Da nun die Peripherie p des Kreises, dessen Radius = 1 ist, zwischen jene beiden Umfänge fällt, so ist daher $p = 6{\cdot}283185$, also $\pi = \frac{p}{2} = 3{\cdot}141592$.

4) Rektifikation des Kreises und eines gegebenen Bogens. Die Ludolphische Zahl π kann also als eine bekannte Größe betrachtet werden, und da aus 2. die Gleichung $P : D = \pi$ folgt, so hat man $P = D\,\pi$. Der Umfang eines Kreises wird also gefunden, wenn man den Durchmesser mit π multiplizirt.

Die Länge L eines in Graden α gegebenen Bogens aber wird, wenn R den Radius bezeichnet, wie man leicht sieht, durch folgende Proportion $360 : \alpha = 2\,R\,\pi : L$ gefunden, man erhält nämlich

$$L = \frac{R\,\pi\,\alpha}{180}$$

5) Quadratur des Kreises und eines gegebenen Sektors. Der Flächeninhalt eines Kreises wird offenbar nach 1. wie jener eines regulären Polygons bestimmt; nur hat man in der im §. 30. 2. entwickelten Regel statt jener vom Mittelpunkte des Polygons auf eine

Seite gezogenen Senkrechten o g den Radius des Kreises zu setzen. Es wird demnach der gesuchte Flächeninhalt gefunden, wenn man den Umfang des Kreises mit seinem halben Radius multiplizirt; es ist also die verlangte Kreisfläche $F = 2R\pi . \frac{R}{2} = R^2 \pi$, d. h. der Flächeninhalt ist auch gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Ludolphischen Zahl.

Für die Fläche f eines Kreises, dessen Radius r ist, findet man eben so $f = r^2 \pi$, daher $F : f = R^2 \pi : r^2 \pi = R^2 : r^2$. Zwei Kreisflächen verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Radien.

Der von zwei Radien a o und b o (Fig. 92.) und einem Bogen a c b begrenzte Theil der Kreisebene heißt Ausschnitt (Sektor). Sind nun $ao = r$ und jener Bogen $acb = \alpha^0$ gegebene Größen, so läßt sich der Flächeninhalt x des Sektors durch folgende Proportion $R^2 \pi : x = 360 : \alpha$ finden; man hat nämlich $x = \frac{R^2 \pi \alpha}{360} = \frac{R \pi \alpha}{180} . \frac{R}{2}$, oder wenn man L statt $\frac{R \pi \alpha}{180}$ setzt, $x = L . \frac{R}{2}$, d. h. die Fläche des Sektors ist das halbe Produkt des im Längenmaße L ausgedrückten Bogens mit dem Radius.

VII. Von den Kreisfunktionen.

§. 64. **Erklärung der Kreisfunktionen.** Es sei a (Fig. 95.) der Anfangspunkt eines in der Kreislinie, deren Radius $ao = r$

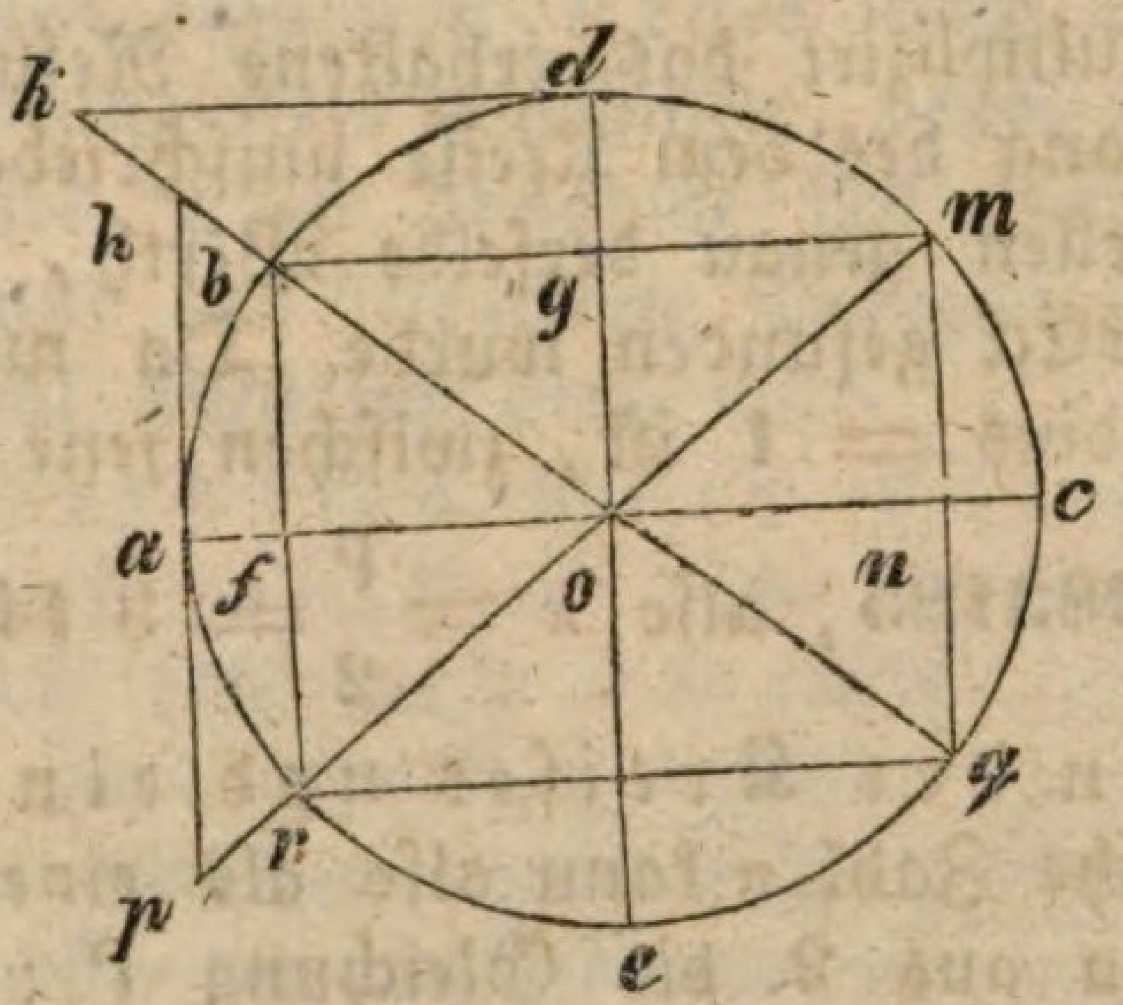


Fig. 95.

ist, abgeschnittenen Bogens $ab = \alpha$; der von a gezogene Durchmesser a c heiße der erste, und der auf ihn senkrechte d e der zweite Hauptdurchmesser. Diese beiden Durchmesser theilen den Kreis in vier kongruente Theile, die wir Quadranten nennen wollen.

1) Die Senkrechte b f, welche vom Endpunkte b des Bogens α auf den ersten Hauptdurchmesser gezogen wird, heißt Sinus dieses Bogens, daher ist $bf = \sin. \alpha$; jene Senkrechte b g hingegen, welche von b auf den zweiten Hauptdurchmesser fällt, wird Cosinus von α genannt; somit $bg = \cos. \alpha$. Da aber $bg = of$ ist, so ist $\cos. \alpha$ auch das Stück des ersten Hauptdurchmessers, welches zwischen dem Centrum und dem Sinus liegt.

2) Das Stück a h der zum Anfangspunkte a des Bogens α ge-

zogenen Tangente, welches zwischen a und dem verlängerten Radius b o liegt, heißt Tangente von α; es ist nämlich a h = tg. α; den bis an die Tangente verlängerten Radius aber nennt man die Secante von α, also h o = sec. α.

3) Den Punkt d, welcher nach der Richtung a d c von a um 90^0 absteht, wollen wir den Anfangspunkt des zweiten Hauptdurchmessers nennen; und nun ist das Stück d k der zu d geführten Tangente, welches zwischen d und dem verlängerten Halbmesser b o liegt, die Cotangente von α, also d k = cot. α; o k aber heißt Cosecante von α, daher o k = cosec. α.

4) Der Theil a f des ersten Hauptdurchmessers, welcher zwischen dem Anfangspunkte a und dem Sinus liegt, heißt Quersinus oder Sinus versus von α, also ist a f = sin. v. α; das Stück d g des zweiten Hauptdurchmessers hingegen, welches zwischen seinem Anfangspunkte d und dem Kosinus b g sich befindet, wird Cosinus versus von α genannt; folglich d g = cos. v. α.

Die angeführten Linien ändern sich offenbar, wenn der Bogen α eine Aenderung erfährt; sie werden daher Funktionen im Kreise oder Kreisfunktionen genannt.

§. 65. **Nähere Untersuchung der Kreisfunktionen.** Die Kreisfunktionen erhalten nach Verschiedenheit der Größe des zugehörigen Bogens auch verschiedene Größen und Lagen, die nun rücksichtlich der drei ersten Funktionen betrachtet werden sollen. Werden die Kreisfunktionen in der Lage, wie sie sich für Bögen im ersten Quadranten ergibt, als positiv angenommen; so müssen sie offenbar in einer der eben genannten entgegengesetzten Lage das Zeichen minus erhalten. Nun hat man folgende Ergebnisse:

1) Für $\alpha = o$ (Fig. 95.) findet man sin. $\alpha = o$, cos. α = a o = + r, tg. $\alpha = o$. Wächst α, so wachsen auch sin. α und tg. α, aber cos. α nimmt ab, und für α = a d = 90^0 wird sin. α = d o = + r, cos. $\alpha = o$ und tg. $\alpha = + \infty$.

2) Wenn $\alpha > 90^0$ wird, so müssen sin. α und tg. abnehmen, aber cos. α wächst; die beiden letztern Funktionen werden negativ, während sin. α positiv bleibt. Setzt man α = a d m, so ergibt sich daher m n = + sin. α, o n = — cos. α, a p = — tg. α. Wird endlich $\alpha = 180^0$, so folgt sin. $\alpha = o$, cos. α = — r, tg. $\alpha = o$.

3) Wächst α über 180^0, so wächst auch der Sinus, wird aber negativ; der Cosinus wird kleiner und bleibt negativ; die Tangente endlich wird größer und positiv. Für α = a d c q hat man demnach n q = — sin. α, o n = — cos. α, h a = + tg. α Setzt man endlich α = a d c e = 270^0, so hat man sin. α = — r, cos. $\alpha = o$, tg. $\alpha = + \infty$.

4) Wenn α an Größe 270^0 übersteigt, so sind sin. α und tg. α negativ und werden kleiner, cos. α aber wird positiv und wächst. Wird α = a d c e r gesetzt, so ergibt sich daher r f = — sin. α, o f = + cos. α, a p = — tg. α. Für α = a d c e a = 360^0 findet man endlich sin. $\alpha = o$, cos. α = + r, tg. $\alpha = 0$.

§. 66. **Fortsetzung.** 1) Ist der Bogen a b = m c = c q = a r = α (Fig. 95.), so ist auch W. b o f = m o n = n o q = r o f,

daher muß nach §. 19. 3. $\triangle$ bof $\cong$ mon $\cong$ noq $\cong$ rof sein; folglich wird bf = mn = nq = rf, und somit findet man sin. α = sin. (180 — α) = — sin. (180 + α) = — sin. (360 — α).

Jedem Bogen entspricht zwar nur ein einziger Sinus, aber jedem Sinus kommen mehrere Bogen zu; einem positiven entsprechen nämlich die Bogen α und 180 — α, die sich zu 180° ergänzen. Zu einem negativen hingegen gehören die Bogen 180 + α und 360 — α, wo α einen im ersten Quadraten liegenden Bogen, der einen eben so großen Sinus hat, anzeigt.

2) Aus den früher betrachteten Dreiecken folgt of = on, daher cos. α = — cos. (180 — α) = — cos. (180 + α) = cos. (360 — α). Obwohl jedem Bogen nur ein einziger Cosinus zukommt, so entsprechen doch jedem Kosinus mehrere Bogen und zwar dem positiven α und 360 — α, dem negativen hingegen 180 — α und 180 + α.

3) Da nach §. 19. $\triangle$ aoh $\cong$ aop ist, so folgt ah = ap, daher tg. α = — tg. (180 — α) = + tg. (180 + α) = — tg (360 — α). Jedem Bogen entspricht nur eine Tangente, aber jeder Tangente gehören mehrere Bogen; und zwar der positiven a und 180 + a, der negativen 180 — a und 360 — a. Aehnliche Untersuchungen lassen sich zwar auch mit den übrigen Kreisfunktionen vornehmen; aber es wird später gezeigt werden, wie auf eine einfachere Weise die nähere Beschaffenheit derselben entwickelt werden könne.

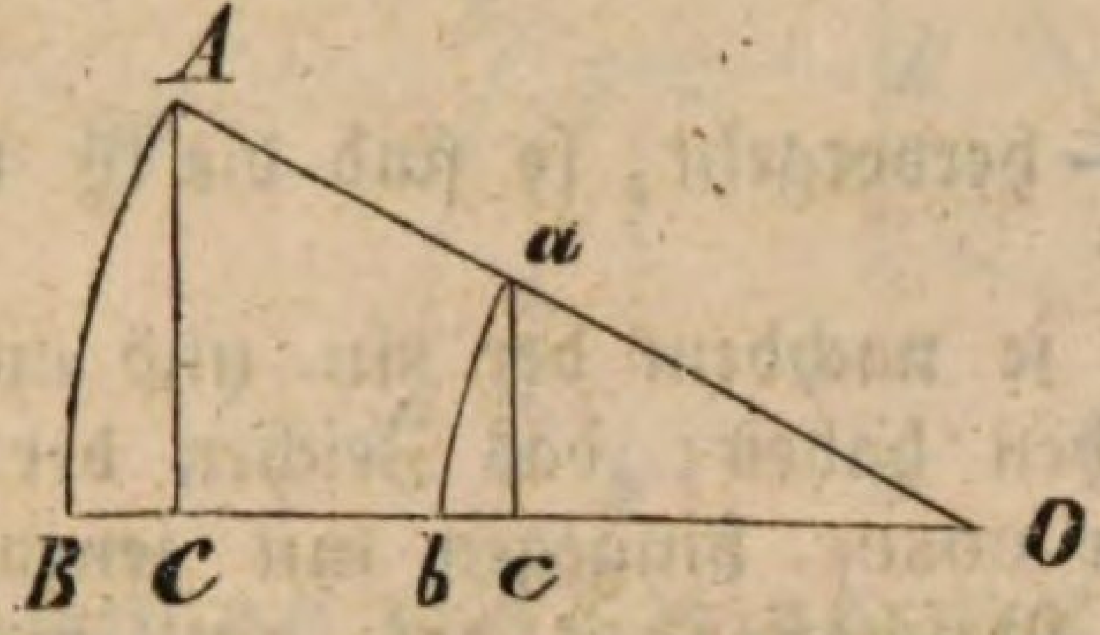
4) Wird der Bogen bd = β gesetzt, so ist $a + \beta$ = 90° und man findet sin. a = cos. β, tg. a = cot. β, sec. a = cosec. β, sin. v. α = cos. v. β; d. h. bei Bögen, die sich zu 90° ergänzen, ist der sin., die tg., sec. und der sin. v. des einen, der cos., die cot., cosec. und der cos. v. des andern.

5) Werden die vom Anfangspunkte a nach der Richtung adce erhaltenen Bögen als positiv betrachtet, so müssen offenbar die von a nach der entgegengesetzten Richtung aecd sich ergebenden negativ sein. Ist nun der Bogen ar = ab und ab = + a, so ist daher ar = — a; somit rf = sin. — a, ap = tg. — a und of = cos. — a; allein diese Funktionen liegen im vierten Quadranten nach der positiven Richtung gezählt; folglich müssen tg. — a und sin. — a negativ, cos. — a aber positiv sein; und da rf = bf, ap = ah, endlich of = of ist, so hat man sin. — a = — sin. a, tg. — a = — tg. a, cos. — a = cos. a.

6) Der Sinus eines Bogens ist die halbe Sehne des doppelten Bogens. Denn wird auf die Sehne br des Bogens bar = 2 . a der Halbmesser ao senkrecht gezogen, so ist ab = a, und bf = sin. a = $\frac{1}{2}$ br. Mittelst dieses Satzes können alle jene Sinuse gefunden werden, welche Hälften bereits berechneter Sehnen sind. Z. B. Die Sehne von 90° ist nach §. 60. 1. r$\sqrt{2}$, folglich sin. 45° = $\frac{r}{2}\sqrt{2}$, die Sehne von 60° ist nach §. 60. 2. r, somit sin. 30° = $\frac{r}{2}$. Die Sehne von 120° ist nach §. 62. 3. r$\sqrt{3}$, also sin. 60° = $\frac{r}{2}\sqrt{3}$.

7) Gleichnamige, auf verschiedene Halbmesser sich beziehende Kreisfunktionen sind den entsprechenden Radien direkt proportionirt. Es seien, um dieß zu beweisen, AB und ab (Fig. 96.) die mit den Radien

Fig. 96.



Ao und ao beschriebenen Bögen, welche a^0 enthalten; ferner AC und ac $\perp$ Bo, so folgt, da das $\triangle$ ACo $\sim$ $\triangle$ aco ist, AC : ac = Co : co = Ao : ao. Werden nun die dem Halbmesser Ao entsprechenden Kreisfunktionen mit großen, und jene die zu ao gehören, mit kleinen Anfangsbuchstaben geschrieben, so hat man Sin. a : sin. a = Cos. a : cos. a = Ao : ao. Auf dieselbe Art wird der ausgesprochene Satz auch für die übrigen Kreisfunktionen erwiesen. Auch ergibt sich, daß von zwei gleichnamigen Funktionen immer eine aus der andern berechnet werden könne; so findet man z. B. sin. $a = \frac{\text{Ao . sin. } a}{\text{ao}}$

§. 67. **Entwicklung der Grundformeln.** Die Kreisfunktionen stehen in den mannigfaltigsten Beziehungen zu einander, von diesen wollen wir jedoch nur die einfachsten und wichtigsten ableiten.

Wendet man auf die rechtwinkligen Dreiecke bof, hoa und dok (Fig. 95.) den pythagorischen Lehrsatz an, so ergibt sich
$bf^2 + of^2 = bo^2$, $ao^2 + ah^2 = ho^2$, $do^2 + dk^2 = ok^2$ oder

1) sin. a^2 + cos. $a^2 = r^2$, 2) r^2 + tg. a^2 = sec a^2, 3) r^2 + cot. a^2 = cosec. a^2. Ferner sind die Dreiecke aoh und bfo sowohl unter sich, als auch dem $\triangle$ dok ähnlich, denn es ist der W. dok = obf und W. dko = bof, somit hat man

ah : bf = ao : of = oh : bo,
ah : do = ao : dk = ho : ok,
bf : do = of : dk = bo : ok, und hieraus folgt:

tg. a : sin. a = r : cos. a, also 4) r sin. a = tg. a . cos. a
tg. a : sin. a = sec. a : r „ 5) sin. a . sec. a = r tg. a
r : cos. a = sec. a : r „ 6) cos. a . sec. $a = r^2$
tg. a : r = r : cot. a „ 7) tg. a . cot. $a = r^2$
tg. a : r = sec. a : cosec. a „ 8) r sec. a = tg. a . cosec. a
r : cot. a = sec. a : cosec. a „ 9) r cosec. a = cot. a sec. a
sin. a : r = cos. a : cot. a „ 10) r cos. a = sin. a . cot. a
sin. a : r = r : cosec. a „ 11) sin. a . cosec. $a = r^2$
cos. a : cot. a = r : cosec. a „ 12) r cot. a = cos. a . cosec. a.

Endlich ergibt sich
af = ao — of oder „ 13) sin. v. a = r — cos. a
dg = do — go oder „ 14) cos. v. a = r — sin. a.

§. 68. **Anwendung der Grundformeln.** Da aus den Gleichungen §. 67. 4., 10., 6. und 11.

$$1)\ \mathrm{tg.}\ a = \frac{\mathrm{r\ sin.}\ a}{\mathrm{cos.}\ a},\quad 2)\ \mathrm{cot.}\ a = \frac{\mathrm{r\ cos.}\ a}{\mathrm{sin.}\ a},\quad 3)\ \mathrm{sec.}\ a = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{cos.}\ a}$$

$$4)\ \mathrm{cosec.}\ a = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{sin.}\ a}$$ hervorgeht, so sind die tg und cot. eines Bogens positiv oder negativ, je nachdem der sin. und cos. desselben einerlei oder verschiedene Zeichen haben; das Zeichen der sec. stimmt mit jenem des cos., das der cosec. hingegen mit jenem des sin. überein. Man kann also aus der Beschaffenheit des sin. und cos. die Eigenschaften der übrigen Funktionen ableiten. So ergibt sich z. B.

$$\mathrm{cot.}\ 180^0 = \frac{\mathrm{r\ cos.}\ 180}{\mathrm{sin.}\ 180} = \frac{\mathrm{r}\ .\ -\mathrm{r}}{0} = \frac{-\mathrm{r}^2}{0} = -\infty,$$

$$\mathrm{cosec.}\ 270^2 = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{sin.}\ 270} = \frac{\mathrm{r}^2}{-\mathrm{r}} = -\mathrm{r},$$

$$\mathrm{cot.}\ (180-a) = \frac{\mathrm{r\ cos.}\ (180-a)}{\mathrm{sin.}\ (180-a)} = \frac{-\mathrm{r\ cos.}\ a}{\mathrm{sin.}\ a} = -\ \mathrm{cot.}\ a,$$

$$\mathrm{sec.}\ (180+a) = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{cos.}\ (180+a)} = \frac{\mathrm{r}^2}{-\mathrm{cos.}\ a} = -\ \mathrm{sec.}\ a.$$

Läßt man nun a in 0, 90, 180, 270 und 360° und dann in $180 - a$, $180 + a$ und $380 - a$ übergehen, so erhält man aus den aufgestellten Gleichungen 1. 2. 3 und 4. nebst den im §. 66. 3. für die Tangente bereits gefundenen Resultaten.

1) $\mathrm{cot.}\ 0 = \infty$, $\mathrm{cot.}\ 90^0 = 0$, $\mathrm{cot.}\ 180^0 = -\infty$, $\mathrm{cot.}\ 270^0 = 0$, $\mathrm{cot.}\ 360^0 = -\infty$,

$\mathrm{cot.}\ a = -\mathrm{cot.}\ (180-a) = \mathrm{cot.}\ (180+a) = -\mathrm{cot.}\ (360-a)$.

2) $\mathrm{sec.}\ 0 = \mathrm{r}$, $\mathrm{sec.}\ 90 = \infty$, $\mathrm{sec.}\ 180 = -\mathrm{r}$, $\mathrm{sec.}\ 270 = -\infty$ $\mathrm{sec.}\ 360 = \mathrm{r}$,

$\mathrm{sec.}\ a = -\mathrm{sec.}\ (180-a) = -\mathrm{sec.}\ (180+a) = \mathrm{sec.}\ (360-a)$.

3) $\mathrm{cosec.}\ 0 = \infty$, $\mathrm{cosec.}\ 90 = \mathrm{r}$, $\mathrm{cosec.}\ 180. = \infty$, $\mathrm{cosec.}\ 270 = -\mathrm{r}$, $\mathrm{cosec.}\ 360 = -\infty$.

$\mathrm{cosec.}\ a = \mathrm{cosec.}\ (180-a) = -\mathrm{cosec.}\ (180+a) = -\mathrm{cosec.}\ (360-a)$.

§. 69. **Gleichungen für sin. $(a \pm \beta)$ und cos. $(a \pm \beta)$.** Wir wollen früher den Fall, in welchem $a + \beta$ und daher auch $a - \beta < 90^0$ ist, vornehmen; dann aber jenen, wo das Gegentheil stattfindet, betrachten.

1) Man beschreibe mit dem Radius $\mathrm{a\,o} = 1$ (Fig. 97.) einen Bogen, schneide $\mathrm{a\,b} = a$ und $\mathrm{b\,c} = \beta$ ab, so daß $a + \beta < 90^0$ ist, ziehe b o und c o, hierauf c d und b f $\perp$ a o und g c $\perp$ b o, so folgt $\mathrm{c\,d} = \mathrm{sin.}\ (a+\beta)$, $\mathrm{o\,d} = \mathrm{cos.}\ (a+\beta)$, $\mathrm{b\,f} = \mathrm{sin.}\ a$, $\mathrm{o\,f} = \mathrm{cos.}\ a$, $\mathrm{g\,c} = \mathrm{sin.}\ \beta$, $\mathrm{o\,g} = \mathrm{cos.}\ \beta$. Wird ferner g h $\perp$ a o und g k $\perp$ c d

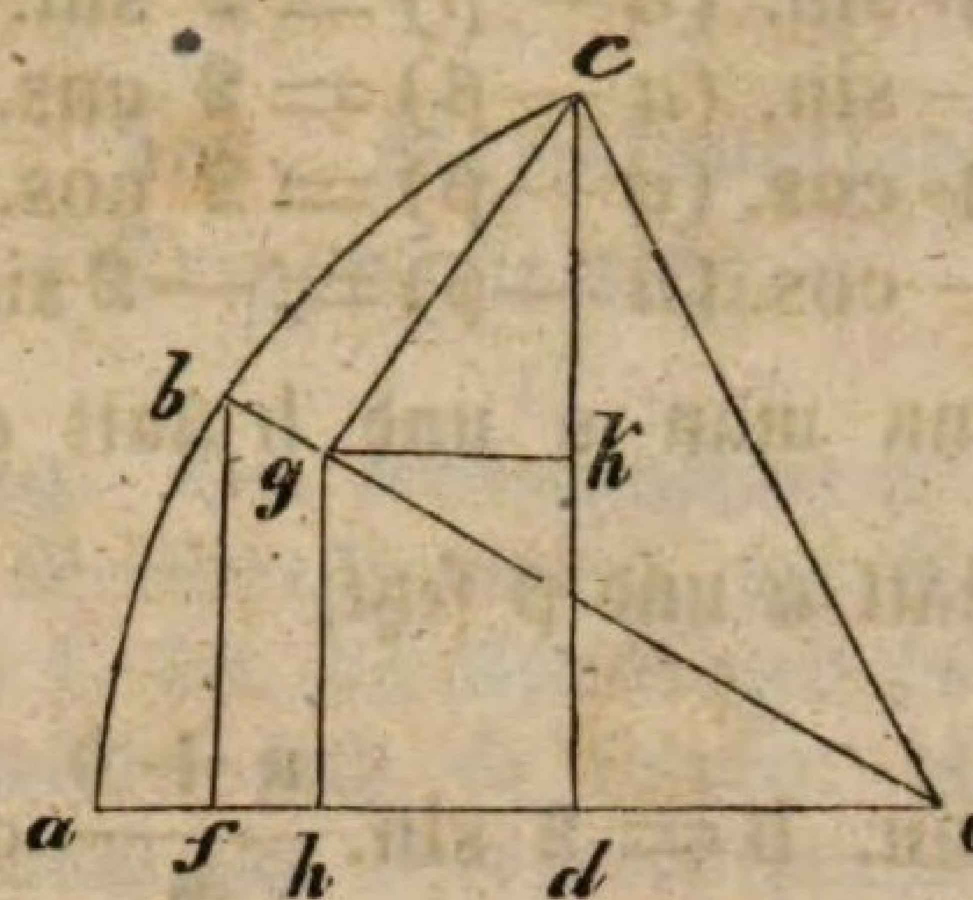


Fig. 97.

gezogen, so findet man $cd = dk + ck = gh + ck$, $od = oh - hd = oh - gk$, und nun ergibt sich, weil das $\triangle bof \sim \triangle goh$

$bf : gh = fo : ho = bo : go$ oder

$\sin. a : gh = \cos. a : ho = 1 : \cos. \beta$, und hieraus $gh = \sin. a \cos. \beta$, $ho = \cos. a \cos. \beta$. Da aber $gc \perp bo$, $gk \perp bf$ und $ck \perp fo$ ist, so ist auch das $\triangle bfo \sim gck$, folglich ergibt sich

$bf : gk = fo : ck = bo : gc$ oder

$\sin. a : gk = \cos. a : ck = 1 : \sin. \beta$, daher

$gk = \sin. a \sin. \beta$, $ck = \cos. a \sin. \beta$. Substituirt man nun die Werthe von gh, ho, gk und ck in die für cd und od erhaltenen Binome, so folgt

1. $\sin. (a + \beta) = \sin. a \cos. \beta + \cos. a \sin. \beta$,

2. $\cos. (a + \beta) = \cos. a \cos. \beta - \sin. a \sin. \beta$. Wird in diesen Gleichungen $-\beta$ statt $+\beta$ gesetzt, so ergibt sich endlich, mit Rücksicht auf §. 66. 5.

3. $\sin. (a - \beta) = \sin. a \cos. \beta - \cos. a \sin. \beta$,

4. $\cos. (a - \beta) = \cos. a \cos. \beta + \sin. a \sin. \beta$.

2) Sind die Bögen a und β größer als 90^0 und kleiner als 180^0, so kann man für sie die Werthe $180 - a$ und $180 - b$, wo $a + b < 90^0$ ist, substituiren, und dann erhält man für den sin. und cos. ihrer Summe nach §. 66. 1. und 2. die Ausdrücke

$\sin. (360^0 - a - b) = -\sin. (a + b) = -\sin. a. \cos. b - \cos. a. \sin. b$,

$\cos. (360^0 - a - b) = \cos. (a + b) = \cos. a. \cos. b - \sin. a. \sin. b$.

Allein es ist $\sin. a = \sin. (180 - a)$, $\sin. b = \sin. (180 - b)$,

$\cos. a = -\cos. (180 - a)$, $\cos. b = -\cos. (180 - b)$,

folglich ergibt sich $\sin. (180 - a + 180 - b) =$

$\sin. (180 - a) \cos. (180 - b) + \cos. (180 - a) \sin. (180 - b)$,

$\cos. (180 - a + 180 - b) =$

$\cos. (180 - a) \cos. (180 - b) - \sin. (180 - a) \sin. (180 - b)$.

Eben so werden auch die beiden andern, auf die Differenz $a - \beta$ sich beziehenden Formeln für den angenommenen Fall erwiesen; und auf ähnliche Art zeigt sich die Richtigkeit sämmtlicher vier Gleichungen, wenn die beiden Bögen a und β, oder nur einer derselben, bis in den dritten oder vierten Quadranten sich erstrecken sollte.

§. 70. Ergebnisse aus den entwickelten Gleichungen.

1) Werden die in §. 69. abgeleiteten Formeln 1. und 3. dann 2. und 4. addirt und hierauf subtrahirt, so folgt

$$\sin.(\alpha+\beta)+\sin.(\alpha-\beta)=2\sin.\alpha\cos.\beta,$$
$$\sin.(\alpha+\beta)-\sin.(\alpha-\beta)=2\cos.\alpha\sin.\beta,$$
$$\cos.(\alpha+\beta)+\cos.(\alpha-\beta)=2\cos.\alpha\cos.\beta,$$
$$\cos.(\alpha+\beta)-\cos.(\alpha-\beta)=-2\sin.\alpha\sin.\beta.$$

Nun ergibt sich, wenn man a und b statt $\alpha+\beta$ und $\alpha-\beta$, daher $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$ statt α und β setzt,

$$1.\ \sin.a+\sin.b=2\sin.\frac{a+b}{2}\cos.\frac{a-b}{2},$$

$$2.\ \sin.a-\sin.b=2\cos.\frac{a+b}{2}\sin.\frac{a-b}{2},$$

$$3.\ \cos.a+\cos.b=2\cos.\frac{a+b}{2}\cos.\frac{a-b}{2},$$

$$4.\ \cos.a-\cos.b=-2\sin.\frac{a+b}{2}\sin.\frac{a-b}{2}$$

2) Dividirt man die Gleichungen 1. und 2. durcheinander, so wird nach §. 68., Gleichungen 1. und 2.

$$\frac{\sin.a+\sin.b}{\sin.a-\sin.b}=\text{tg}.\frac{a+b}{2}\cot.\frac{a-b}{2}$$

Allein es ist wegen §. 67., Gleichung 7., wenn man den Radius $r=1$ setzt,

$$\cot.\frac{a-b}{2}=\frac{1}{\text{tg}.\frac{a-b}{2}},\ \text{somit}\ \frac{\sin.a+\sin.b}{\sin.a-\sin.b}=\frac{\text{tg}.\frac{a+b}{2}}{\text{tg}.\frac{a-b}{2}}$$

3) Setzt man in den in §. 69. aufgestellten Gleichungen 1. und 2. $\alpha=\beta$, so folgt

1) $\sin.2\alpha=2\sin.\alpha\cos.\alpha$, 2) $\cos.2\alpha=\cos.\alpha^2-\sin.\alpha^2$.

4) Aus §. 67., Gleichung 1. ergibt sich, wenn $r=1$ gesetzt wird: $\sin\alpha^2+\cos.\alpha^2=1$ oder $\cos.\alpha^2=1-\sin.\alpha^2$. Substituirt man diesen Werth in die eben für $\cos.2\alpha$ gefundene Formel, so folgt:

$$\cos.2\alpha=1-2\sin.\alpha^2\ \text{oder}\ \sin.\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos.2\alpha}{2}}$$

und läßt man hier α in $\frac{\alpha}{2}$ übergehen, so ergibt sich endlich

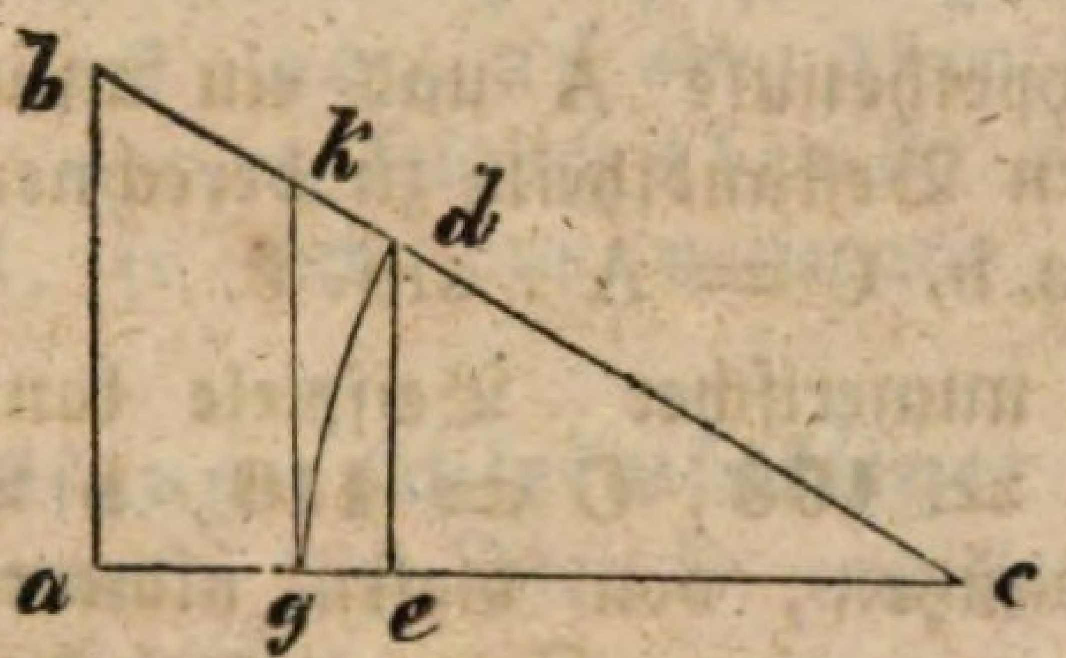
$$\sin.\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos.\alpha}{2}}$$

VIII. Anwendung der Kreisfunktionen auf Dreiecke (Trigonometrie).

§. 71. **Einleitung.** Die Kreisfunktionen haben wir bisher als gerade Linien, welche zur Größebestimmung der Kreisbögen dienen, kennen gelernt; da aber nach §. 53. die Kreisbögen das Maß der ihnen zukommenden Mittelpunktswinkel sind, so können die Kreisfunktionen auf diese Winkel bezogen und auch zur Größebestimmung der letztern angewendet werden. Die Kreisfunktionen, in diesem Sinne aufgefaßt, werden goniometrische Funktionen genannt, und bilden ein wichtiges Hilfsmittel zur Auflösung sämmtlicher Probleme, in welchen aus drei Stücken, die ein Dreieck bestimmen, die übrigen durch Rechnung bestimmt werden sollen, welche Lehre Trigonometrie heißt. Dieß ist der Grund, warum man nicht selten, obwohl minder zweckmäßig, die Kreisfunktionen auch trigonometrische nennt.

§. 72. **Lehrsätze für das rechtwinklige Dreieck.** Um die folgenden Sätze zweckmäßig darstellen zu können, wollen wir die Hypothenuse b c (Fig. 98.) des △ a b c mit A, die Katheten a c und a b desselben aber mit B und C bezeichnen.

Fig. 98.



1) Es sei von c aus als Centrum mit dem Radius d c = 1 der Bogen d g beschrieben, und d e ⊥ a c, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken a b c und d e c, b c : a b = d c : d e oder A : C = 1 : sin. c. Da aber b + c = 90° ist, so ist nach §. 66. 4. sin. c = cos. b, also A : C = 1 : sin. c = 1 : cos. b. Es verhält sich demnach die Hypothenuse zu einer Kathete, wie der Halbmesser zum Sinus des der letztern entgegenstehenden oder zum Kosinus des ihr anliegenden Winkels.

2) Aus den Dreiecken a b c und d e c erhält man die Proportion a b : a c = d e : e c oder C : B = sin. c : cos. c. Es verhält sich also eine Kathete zur andern, wie der Sinus zum Kosinus des der ersten gegenüberstehenden Winkels.

3) Zieht man g h ⊥ a c, so folgt, weil das △ a b c ∾ g h c a c : a b = g c : g h oder B : C = 1 : tg. c, und wegen tg. c = cot. b ergibt sich B : C = 1 : tg. c = 1 : cot. b. Es verhält sich also auch eine Kathete zur andern, wie der Halbmesser zur Tangente des der zweiten oder zur Kotangente des der ersten gegenüberstehenden Winkels.

§. 73. **Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks.** Die im §. 19. entwickelten Lehrsätze für die Kongruenz rechtwinkliger Drei-

ecke, veranlassen eben so viele hierher gehörige Probleme, die nun aufgelöst werden sollen.

1) Die beiden Katheten B und C seien gegeben, und die übrigen Stücke durch Rechnung zu bestimmen, d. h. das Dreieck aufzulösen. Aus §. 72. 3. folgt $tg. c = cot. b = \frac{C}{B}$, also sind die spitzigen Winkel des Dreiecks bekannt; die Bestimmung der Hypothenuse folgt aus §. 72. 1., nämlich $A = \frac{C}{sin. c}$

2) Es seien die Kathete B und der ihr anliegende spitzige W. c bekannte Größen. Man findet $b = 90^0 - c$, $A = \frac{B}{sin. b}$, und nach §. 72. 3. $C = B\ tg.\ c$. Wenn die Kathete B und der Gegenwinkel b gegeben sind, verfährt man auf dieselbe Art.

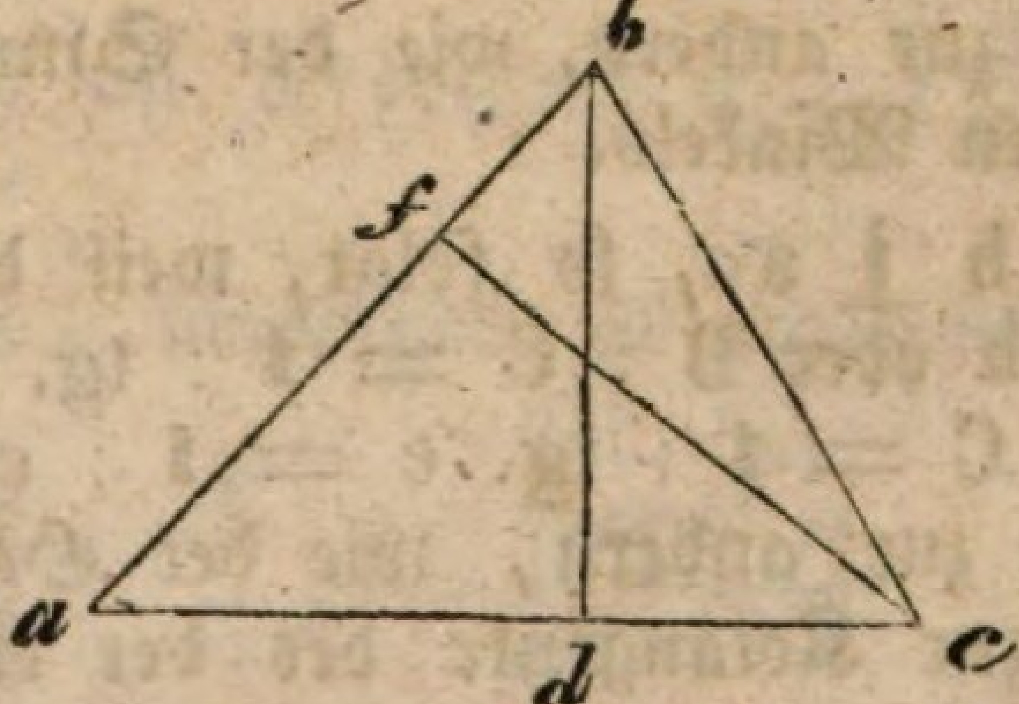
3) Aus der Hypothenuse A und einer Kathete B die übrigen Stücke zu bestimmen. Nach §. 72. 1. ergibt sich $sin. b. = cos. c = \frac{B}{A}$, folglich sind die beiden W. b und c bekannt; und nun findet man $C = A\ .\ sin.\ c.$

4) Wenn die Hypothenuse A und ein anliegender W. b gegeben sind, die noch fehlenden Bestandtheile zu berechnen. Offenbar ist $c = 90 - b$ und $B = A\ .\ sin. b$, $C = A\ .\ sin.\ c.$

Zur Berechnung numerischer Beispiele kann man folgenden Angaben: $A = 180$, $B = 108$, $C = 140$, $b = 36^0\ 52'\ 12''$ und $c = 53^0\ 7'\ 48''$ benützen, von diesen nimmt man nach Umständen zwei, darunter aber immer eine Seite als bekannt an, und bestimmt hierauf die übrigen Stücke. Doch muß man sich früher mit dem Gebrauche trigonometrischer Tafeln vertraut machen; denn diese lehren, wie man die einem Bogen oder Winkel entsprechende Funktion und umgekehrt finden könne. Die vorzüglichsten Tafeln dieser Art findet man unter Anderen in Salomon's, Vega's, Winkler's und Lindner's logarithmisch-trigonometrischen Handbüchern.

§. 74. **Lehrsätze für das schiefwinklige Dreieck.** Wir wollen die Seiten b c, a c und a b (Fig. 99.) des Dreiecks a b c

Fig. 99.



der Ordnung nach mit A, B und C bezeichnen, und nun nachstehende Entwicklungen vornehmen.

1) In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinuse der Gegenwinkel. Um dieß zu beweisen ziehe man $bd \perp ac$, und bestimme diese Senkrechte aus den Dreiecken abd und bcd nach §. 72. 1. so folgt $bd = C\ \sin.\ a = A\ .\sin.\ c$, daher $A : C = \sin.\ a : \sin.\ c$ Auf dieselbe Art findet man auch, wenn $cf \perp ab$ ist, $A : B = \sin.\ a : \sin.\ b$.

2) In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zur Tangente der halben Differenz derselben. Dem Vorhergehenden gemäß hat man $A : B = \sin.\ a : \sin.\ b$, daher $A + B : A - B = \sin.\ a + \sin.\ b : \sin.\ a - \sin.\ b$, wo wir $A > B$, somit auch $a > b$ voraussetzen; aber aus §. 70. 2. folgt $\sin.\ a + \sin.\ b : \sin.\ a - \sin.\ b. = tg.\ \frac{a+b}{2} : tg.\ \frac{a-b}{2}$, demnach ergibt sich

$$A + B : A - B = tg.\ \frac{a+b}{2} : tg.\ \frac{a-b}{2}$$

3) Das Quadrat jeder Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern, weniger dem doppelten Produkte derselben mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Es sei $bd \perp ac$ und der W. $a < R$, so ergibt sich nach §. 33. 1. $bc^2 = ac^2 + ab^2 - 2\ .\ ac\ .\ ad$ oder $A^2 = B^2 + C^2 - 2\ .\ B\ .\ ad$. Allein es ist $ad = C\ .\ \cos.\ a$, folglich $A^2 = B^2 + C^2 - 2B\ .\ C\ .\ \cos.\ a$. Ist aber W. $a > R$, so wird cos. a negativ, demnach das entsprechende Glied positiv.

§. 75. **Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.** Da fünf Lehrsätze für die Kongruenz der Dreiecke erwiesen wurden, so sind hier auch fünf Probleme aufzulösen.

1) Aus einer Seite B (Fig. 99.) und den beiden anliegenden W. a und c sollen die übrigen Stücke berechnet werden. Für den dritten Winkel erhält man offenbar $b = 180^0 - (a + c)$, die fehlenden Seiten A und C aber werden nach §. 74. 1. gefunden, nämlich $A = \frac{B\ \sin.\ a}{\sin.\ b}$ und $C = \frac{A\ \sin.\ c}{\sin.\ a}$ Auf dieselbe Art verfährt man, wenn die Seite B, der Gegenwinkel b und der ihr anliegende W. c gegeben sind.

2) Es seien zwei Seiten A und B und der, der größern A entgegengesetzte W. a gegeben. Für den W. b findet man nach §. 74. 1. $\sin.\ b = \frac{B\ .\ \sin.\ a}{A}$ Da vermöge der Voraussetzung $A > B$ ist, so ist auch $a > b$, und daher muß, es mag a als ein stumpfer oder spitziger Winkel betrachtet werden, immer $b < 90^0$ sein. Für den dritten Winkel und die noch fehlende Seite ergibt sich

$$c = 180^0 - (a + b) \text{ und } C = \frac{A\ \sin.\ c}{\sin.\ a}$$

3) Wenn zwei Seiten A und B und der eingeschlossene W. c. gegeben sind, das Dreieck aufzulösen. Offenbar ist $a + b = 180 - c$, daher sind die drei ersten Glieder der im §. 74. 2. aufgestellten Proportion bekannt; demnach erhält man, wenn $A > B$ ist,

$$tg. \frac{a - b}{2} = \frac{A - B}{A + B} tg. \frac{a + b}{2}$$ Hieraus folgt der Werth von $a - b$, und dieser mit jenem von $a + b$ gibt bekanntlich die einzelnen W. a und b. Für die dritte Seite aber ergibt sich $A = \frac{B . sin. a}{sin. b} = \frac{C . sin. a}{sin. c}$.

Für die Fläche f eines Dreiecks erhält man aus den gegebenen Größen einen sehr einfachen Ausdruck; denn ist $bd \perp ac$, so folgt

$$f = \frac{B . bd}{2} \text{ und } bd = A . sin. c, \text{ daher } f = \frac{A . B}{2} sin. c.$$

4) Die drei Seiten A, B und C eines Dreiecks sollen gegebene Größen sein. Bestimmt man aus der im §. 74. 3. entwickelten Gleichung cos. a, so folgt $cos. a = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2 BC}$, und eben so zeigt sich auch

$$cos. b = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2 AC} \text{ und } cos. c = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2 AB}$$

Diese Formeln sind aber nicht der logarithmischen Behandlung fähig; da man jedoch bei trigonometrischen Berechnungen der Bequemlichkeit wegen fast immer die Logarithmen anwendet, so ist es nöthig, hieraus eine diesem Zwecke entsprechende Gleichung abzuleiten. Nach §. 70. 4. findet man:

$$sin. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos. a}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{B^2 + C^2 - A^2}{4 BC}} \text{ oder}$$

$$sin. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{2 BC - B^2 - C^2 + A^2}{4 BC}} = \sqrt{\frac{A^2 - (B - C)^2}{4 BC}}, \text{ also}$$

$$sin. \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(A + B - C)(A - B + C)}{BC}}$$

Aehnliche Formeln können auch für $sin. \frac{b}{2}$ und $sin. \frac{c}{2}$ entwickelt werden.

Um die Fläche f des Dreiecks durch die drei Seiten desselben auszudrücken, wollen wir zuerst sin. c aus cos. c ableiten. Daher erhält man nach §. 67. Gleichung 1.

$$sin. c^2 = 1 - cos. c^2 = 1 - \frac{(A^2 + B^2 - C^2)^2}{4 A^2 B^2} = \frac{4 A^2 B^2 - (A^2 + B^2 - C^2)^2}{4 A^2 B^2}$$

Der Zähler dieses Bruches, den wir mit D bezeichnen wollen, läßt sich nun auf folgende Art darstellen:

$$D = (2 AB + A^2 + B^2 - C^2)(2 AB - A^2 - B^2 + C^2) = [(A + B)^2 - C^2][C^2 - (A - B)^2];$$

$$D = (A + B + C)(A + B - C)(C + A - B)(C - A + B).$$

Bestimmt man nun den Werth von sin. c, und substituirt denselben in die für f in 3. erhaltene Formel, so ergibt sich $\sin. c = \frac{1}{2AB}\sqrt{D}$ und $f = \frac{AB}{2}\sin. c = \frac{1}{4}\sqrt{D}$.

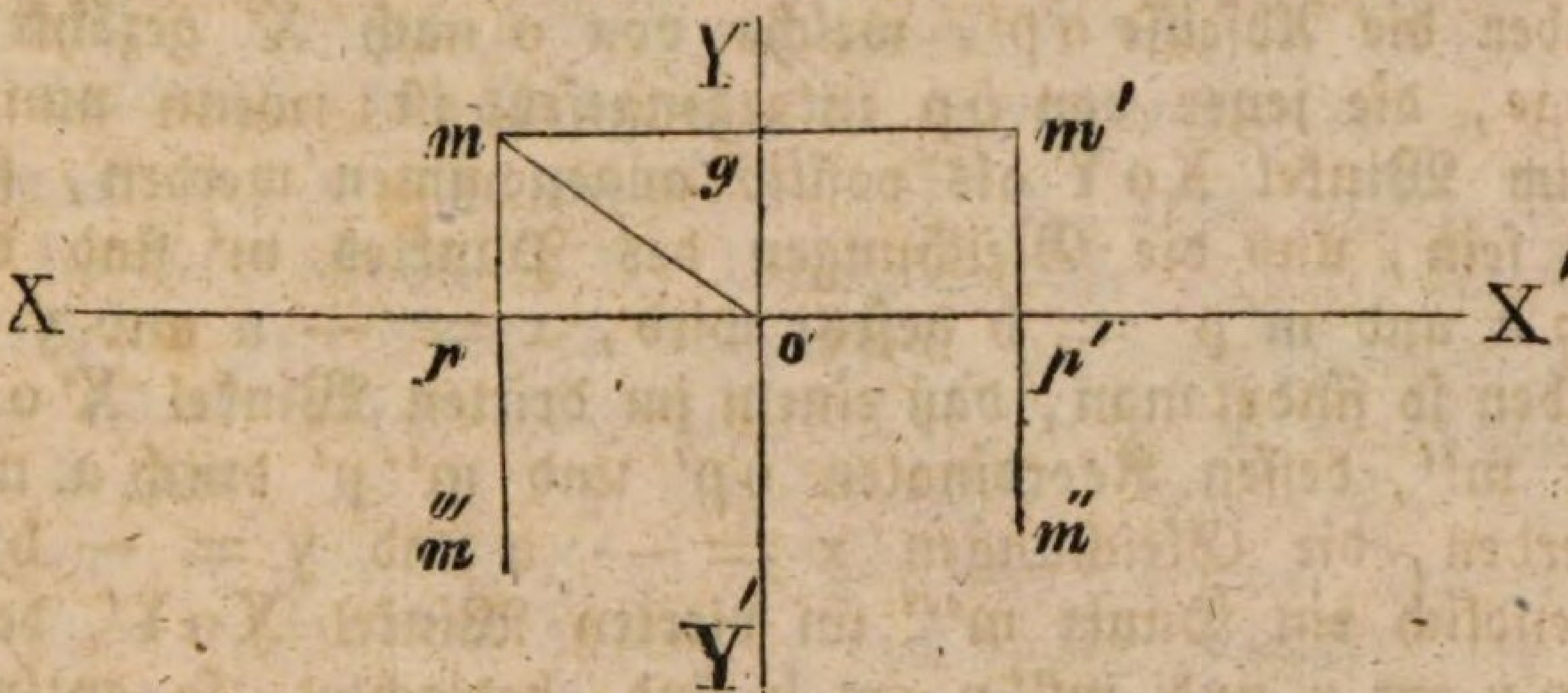
Zur Berechnung numerischer Beispiele können folgende Bestimmungen $A = 108$, $B = 84$, $C = 48$ Klftr., $a = 106^0\ 36'\ 5{\cdot}2''$, $b = 48^0\ 11'\ 23{\cdot}1''$, $c = 25^0\ 12'\ 31{\cdot}7''$, $f = 1932$ Quadr.-Klafter benützt werden.

IX. Von der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

§. 76. Analytische Bestimmung der Lage des Punktes in der Ebene.

1) Sind XX′ und YY′ (Fig. 100.) zwei unter rechten Winkeln

Fig. 100.



in o sich schneidende unveränderliche gerade Linien und m ein Punkt innerhalb des Winkels XoY, so wird dessen Lage offenbar durch die Länge der von ihm auf oX und oY gezogenen Senkrechten mp und mq vollkommen bestimmt; denn durch die Länge mp allein wird ausgedrückt, daß m in der zu oX im Abstande mp parallel gezogenen Geraden sich befinde; eben so wird durch mq angezeigt, daß m in der zu oY in der Entfernung mq parallel gezogenen Geraden liege; durch gleichzeitige Annahme beider Entfernungen wird also ein Punkt, der in jenen beiden Geraden liegt, also ihr Durchschnitt ist, bezeichnet; aber zwei gerade Linien können sich nur in einem einzigen Punkte schneiden, somit gibt es auch nur diesen Punkt, der jenen Abständen mp und mq entspricht, und daher ist er durch diese vollkommen bestimmt.

Die Gerade mq oder vielmehr die ihr gleiche op heißt Abscisse, mp aber Ordinate des Punktes m, beide zusammen heißen Koordinaten desselben, und da sie sich unter einem rechten Winkel schneiden, so werden sie insbesondere rechtwinklige Koordinaten genannt. Abscisse und Ordinate eines Punktes werden gewöhnlich mit x und y bezeichnet. Die Gerade XX′, auf welcher die Abscissen gezählt werden, heißt Abscissenachse; YY′ hingegen Ordinatenachse, der Winkel XoY endlich wird Koordinatenwinkel und dessen Scheitel o Koordinaten-Anfangspunkt genannt.

2) Hat man rücksichtlich des Punktes m die Längen o p und m p gemessen, und dafür die Werthe a und b gefunden; so drücken die Gleichungen $x = a$ und $y = b$ die Lage jenes Punktes aus, und werden daher auch Gleichungen desselben genannt, und eben so kann auch die Lage jedes andern, im Koordinatenwinkel X o Y liegenden Punktes durch zwei Gleichungen charakterisirt werden.

Je kleiner a wird, desto näher rückt m der Geraden o Y, und ist $a = o$, so fällt m mit q zusammen; daher sind $x = o$, und $y = b$ die Gleichungen eines Punktes, der in der Ordinatenachse liegt. Eben so findet man, daß $x = a$ und $y = o$ die einem in der Abscissenachse befindlichen Punkte entsprechenden Gleichungen sind. Wird endlich $a = o$ und $b = o$ angenommen, so muß m in beiden Achsen zugleich, also in o liegen; und daher sind $x = o$ und $y = o$ die Gleichungen des Koordinaten-Anfangspunktes.

3) Betrachtet man einen im zweiten Koordinatenwinkel X' o Y liegenden Punkt m', so hat dessen Ordinate m' p' dieselbe Lage, wie m p; aber die Abscisse o p', welche von o nach X' gezählt wird, hat eine Lage, die jener von o p entgegengesetzt ist; wenn nun die Koordinaten im Winkel X o Y als positiv angenommen werden, so muß o p' negativ sein, und die Gleichungen des Punktes m' sind daher, wenn $o p' = a$ und $m' p' = b$ gesetzt wird, $x = - a$ und $y = b$.

Eben so findet man, daß einem im dritten Winkel X' o Y' liegenden Punkte m'', dessen Koordinaten o p' und m'' p' durch a und b bezeichnet werden, die Gleichungen $x = - a$ und $y = - b$ entsprechen. Wird endlich ein Punkt m''' im vierten Winkel X o Y', dessen Koordinaten $o p = a$ und $m''' p = b$ sind, betrachtet, so entsprechen demselben offenbar die Gleichungen $x = a$ und $y = - b$.

Vergleicht man die hier erhaltenen Resultate mit den im §. **65.** gefundenen, so folgt, daß die Zeichen der Koordinaten mit jenen des Sinus und Kosinus in den verschiedenen Quadranten genau übereinstimmen.

§. 77. **Von der Gleichung einer krummen Linie.** Ist in einer Ebene eine krumme Linie gezogen, so läßt sich jeder Punkt derselben durch die ihm entsprechenden Koordinaten auf die eben gezeigte Weise bestimmen; gibt es nun für die Koordinaten jedes Punktes ein bestimmtes Gesetz ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, so kann man mittelst der dieses Gesetz darstellenden Gleichung aus jeder Abscisse die ihr zugehörige Ordinate, und daher auch eben so viele, diesen Koordinaten entsprechende Punkte der krummen Linie ableiten. Obige Gleichung drückt demnach im genannten Falle den Charakter jener krummen Linie auf eine allgemeine Weise aus; es müssen also aus derselben alle Eigenschaften der letztern hervorgehen, und daher wird sie auch Gleichung jener krummen Linie genannt.

§. 78. **Gleichung des Kreises.** Um das §. 77. Gesagte durch einen speziellen Fall zu beleuchten, wollen wir nun die Gleichung des Kreises aufsuchen, und diesen auf rechtwinklige Koordinaten, deren Anfangspunkt das Centrum ist, beziehen. Es sei ein Kreis, dessen Mittelpunkt o und Radius $o m = r$ (Fig. **100.**) ist, beschrieben; ferner $m p \perp o X$,

dann $op = x$ als Abscisse und $mp = y$ als Ordinate des Punktes m, so gibt das $\triangle\, omp$, $op^2 + mp^2 = om^2$ oder $x^2 + y^2 = r^2$. Da nun die Natur der Kreislinie darin besteht, daß jeder Punkt derselben vom Centrum den nämlichen Abstand hat, so drückt diese Gleichung, in welcher r eine konstante Größe anzeigt, das Gesetz aus, an welches die Koordinaten x und y jedes Punktes gebunden sein müssen; sie ist daher die Gleichung des Kreises und gibt für jede Abscisse die ihr zugehörige Ordinate; denn man hat $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

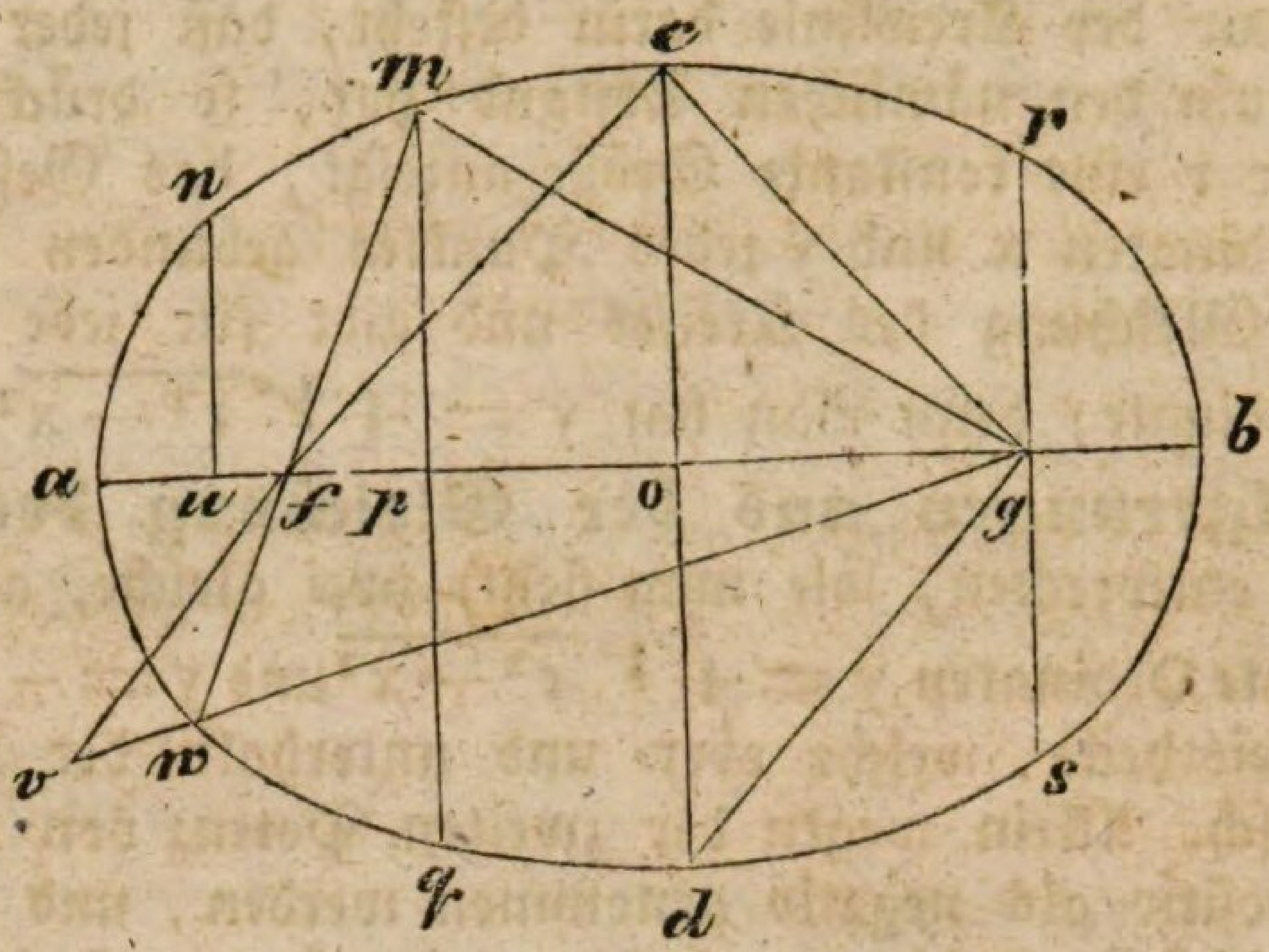
§. 79. Folgerungen aus der Gleichung des Kreises. Jeder Abscisse x entsprechen, wie man sieht, zwei gleiche, aber der Lage nach entgegengesetzte Ordinaten $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ und $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$; daher sind die Kreistheile, welche ober- und unterhalb der Abscissenachse liegen, symmetrisch. Allein wegen der zweiten Potenz von x kann jede Abscisse sowohl positiv als negativ genommen werden, und gibt in diesen Fällen stets dieselbe Ordinate; somit entsprechen auf beiden Seiten der Ordinatenachse gleichen Abscissen, gleiche Ordinaten. Auch die Ordinatenachse theilt daher den Kreis in zwei symmetrische Theile.

Setzt man $x = o$, so wird $y = \pm r$, man erhält also zwei Punkte des Kreises, welche in der Ordinatenachse liegen; letztere wird also vom Kreise in zwei Punkten geschnitten, die vom Centrum den Abstand r haben. Eben so hat man für $y = o$, $x = \pm r$, folglich zwei Punkte des Kreises, die in der Abscissenachse liegen; also wird auch diese vom Kreise in zwei Punkten geschnitten, die vom Centrum den Abstand r besitzen. Wenn die Abscisse x von o bis r wächst, so nimmt die Ordinate y von r bis o ab; wird aber $x > r$, so werden die Werthe von y unmöglich, daher einer solchen Abscisse gar keine Punkte des Kreises entsprechen. Faßt man das Gesagte zusammen, so ist der Kreis eine geschlossene krumme Linie, welche von zwei aufeinander senkrechten Durchmessern in vier kongruente Theile getheilt wird. Wie man noch andere Eigenschaften des Kreises auf die eben angezeigte Weise findet, ist eigentlich schon aus §. 46. bekannt; denn die an jenem Orte aufgestellte Gleichung $d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2$ ist im Grunde mit der hier entwickelten $x^2 + y^2 = r^2$ einerlei, wenn man (Fig. 67.) hk als Abscissenachse und o als Koordinaten-Anfangspunkt betrachtet, ferner $oc = d$ als Abscisse und $ac = \frac{s}{2}$ als Ordinate des Punktes b annimmt.

§. 80. Grundeigenschaften der Ellipse. Die Ellipse ist eine krumme Linie, in welcher die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen fixen Punkten einer gegebenen Geraden gleich ist. Sind nun f und g (Fig. 101.) jene beiden fixen Punkte, und bezeichnet α die gegebene Gerade, so muß, wenn m ein Punkt der Ellipse sein soll, $fm + mg = \alpha$ sein. f und g heißen Brennpunkte, ihr Abstand fg wird doppelte Excentricität und die Mitte o derselben das Centrum der Ellipse genannt. $fo = og$ ist also die Excentricität,

die wir mit e bezeichnen wollen; die Geraden fm und mg endlich nennt man Vektoren von m.

Fig. 101.



1) Die doppelte Excentricität ist kleiner, als jene Gerade α; denn es ist $fm + mg = \alpha$, aber auch $fm + mg > 2e$, somit $\alpha > 2e$, und daher auch $\frac{\alpha}{2} > e$. Trägt man nun auf fg von o aus zu beiden Seiten die Länge $\frac{\alpha}{2}$ auf, so müssen die Endpunkte a und b über of und og hinaus liegen, und es ist $ab = ao + ob = \alpha$, ferner $af = bg$. Der Punkt a liegt in der Ellipse, denn seine Vektoren af und ag geben $af + ag = ag + bg = ab = \alpha$, und dasselbe gilt auch von b. Diese Punkte a und b heißen Scheitel der Ellipse, und die Gerade ab, in welcher diese, das Centrum und die Brennpunkte liegen, wird erste Achse derselben genannt. Gewöhnlich setzt man $ab = 2a$, und dann wird $ao = bo = a$. Die Summe der einem Punkte der Ellipse entsprechenden Vektoren muß also immer der erste Achse gleich sein; es ist nämlich $fm + mg = 2a$.

2) Wenn die erste Achse ab und die Brennpunkte f und g gegeben sind, so kann die entsprechende Ellipse auf folgende Weise gezeichnet werden. Man nehme einen Faden, dessen Länge = ab ist, befestige seine Endpunkte in f und g und spanne ihn gleichmäßig in der Art, daß das △ fmg entsteht, so ist m ein Punkt jener Ellipse. Setzt man hierauf zwischen fm und mg in m einen Bleistift ein, und fährt dann bei stets gleichmäßiger Spannung des Fadens von m nach a und dann nach b, so ist der oberhalb ab liegende Theil der Ellipse gefunden, und eben so kann auch der unterhalb ab liegende gezeichnet werden. Offenbar kann man nur eine einzige Ellipse finden, in welcher die erste Achse eine gegebene Größe hat, und die Brennpunkte eine bestimmte Lage besitzen; durch die erste Achse und die Excentricität ist daher die Ellipse vollkommen bestimmt.

3) Die durch das Centrum gehende, auf der ersten Achse ab senkrecht stehende Sehne cd heißt zweite Achse, und nun läßt sich leicht zeigen, daß der einem Endpunkte c derselben entsprechende Vektor $fc = a$ sei. Denn zieht man cg, so ist das △ foc ≅ △ goc, daher

$fc = gc$. Da aber auch $fc + gc = 2a$ ist, so hat man $2 . fc = 2 . a$ oder $fc = a$. Ferner ist o der Mittelpunkt von cd; denn es ist wegen $gc = gd = a$, und $og = og$ das $\triangle cog \cong dog$, daher $oc = od$. Wird nun $cd = 2b$ gesetzt, so ist $oc = od = b$ die halbe zweite Achse.

4) Betrachtet man das $\triangle goc$, so zeigt sich $gc^2 = oc^2 + og^2$ oder $a^2 = b^2 + e^2$; das Quadrat der halben ersten Achse ist also gleich dem Quadrate der halben zweiten Achse, mehr dem Quadrate der Excentricität. Sind von den Größen a, b und e zwei bekannt, so kann die dritte stets berechnet werden; also ist auch die Ellipse bestimmt, wenn a und b oder b und e gegeben sind. Aus der obigen Gleichung folgt auch $b^2 = a^2 - e^2 = (a + e)(a - e) = (ao + og)(bo - og)$ oder $b^2 = ag . bg$, demnach $ag : b = b : bg$. Die halbe zweite Achse ist also die mittlere Proportionale zwischen den Abständen eines Brennpunktes von den beiden Scheiteln.

§. 81. **Gleichungen für die Vektoren.** Die Ellipse sei gegeben und ein Punkt m (Fig. 101.) in derselben, man soll die Vektoren dieses Punktes berechnen. Durch die Größen a und e ist die Ellipse bestimmt, und werden die Punkte derselben auf rechtwinklige Koordinaten, deren Anfangspunkt o und Abscissenachse ab ist, bezogen, hierauf $mp \perp ao$ errichtet; so ist $op = x$ die Abscisse von m, und es müssen daher unserer Aufgabe gemäß a, e und x als bekannt angenommen werden. Nun geben die Dreiecke mpg und mpf, $mg^2 = mp^2 + pg^2$, $mf^2 = mp^2 + fp^2$, daher $mg^2 - fm^2 = pg^2 - fp^2$ oder $(mg + fm)(mg - fm) = (pg + fp)(pg - fp)$. Es ist aber $mg + fm = 2a$, $pg = og + op = e + x$, $fp = of - op = e - x$, somit ergibt sich durch Substitution $2a(mg - fm) = 2e . 2x$ oder $mg - fm = \frac{2ex}{a}$ Aus $mg + fm$ und $mg - fm$ folgt endlich der größere Vektor $mg = a + \frac{ex}{a}$ und der kleinere $mf = a - \frac{ex}{a}$

§. 82. **Gleichung der Ellipse.** Um das Gesetz der Koordinaten eines jeden Punktes zu finden, ist es hinreichend, aus einem der beiden Dreiecke fmp und gmp die Ordinate $mp = y$ zu bestimmen; das erstere gibt nun: $mp^2 = fm^2 - fp^2 = (fm + fp)(fm - fp)$.

Es ist aber $fm = a - \frac{ex}{a}$, $fp = e - x$, also hat man

$$y^2 = \left(a - \frac{ex}{a} + e - x\right)\left(a - \frac{ex}{a} - e + x\right) =$$

$$\frac{a(a + e) - x(a + e)}{a} . \frac{a(a - e) + x(a - e)}{a}$$

$$y^2 = \frac{(a + e)(a - x)}{a} . \frac{(a - e)(a + x)}{a} = \frac{(a^2 - e^2)(a^2 - x^2)}{a^2}$$

Da aber nach §. 80. 4. $a^2 - e^2 = b^2$ ist, so folgt endlich $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

§. 83. **Ergebnisse aus der Gleichung der Ellipse.**

1) Bestimmt man aus der Gleichung der Ellipse den Werth von y, so folgt $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Wegen der zweiten Potenz von x entsprechen jeder sowohl positiven als negativen Abscisse zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten; schneidet man daher links und rechts der zweiten Achse die Abscissen o p und o g (Fig. 101.) ab, so gehören zu ersterer die Ordinaten m p und p q, deren Länge durch $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - op^2}$ ausgedrückt wird; letzterer aber entsprechen die Ordinaten r g und g s, deren Länge der Ausdruck $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - og^2}$ darstellt. Die erste Achse halbirt also das ganze System der auf ihr senkrechten Sehnen. Verwechselt man a mit b, d. h. werden die Abscissen auf der zweiten Achse abgeschnitten, so ergibt sich $y = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$, also gehören auch nun zu jeder positiven und negativen Abscisse zwei gleiche und entgegengesetzte Ordinaten, folglich theilt auch die zweite Achse die auf ihr senkrechten Sehnen in zwei gleiche Theile. Ueberhaupt können auch hier dieselben Untersuchungen, wie im §. 79., vorgenommen werden, und es zeigt sich, daß die Ellipse eine geschlossene krumme Linie sei, welche durch beide Achsen in vier kongruente Theile getheilt wird.

2) Die durch den Brennpunkt gehende, auf der ersten Achse senkrecht stehende Sehne r s heißt Parameter, die Ordinate r g, die wir p nennen wollen, ist also die Hälfte desselben, und wird offenbar aus der Gleichung der Ellipse gefunden, wenn man $x = og = e$ setzt; daher erhält man $p^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - e^2)$. Nun ist aber $a^2 - e^2 = b^2$, also folgt $p^2 = \frac{b^4}{a^2}$ oder $p = \frac{b^2}{a}$, somit $a : b = b : p$, d. h. der halbe Parameter ist die dritte Proportionale zur ersten und zweiten Halbachse.

3) Die Quadrate der Ordinaten sind den Produkten der zugehörigen Segmente der ersten Achse proportionirt. Werden m p und $nu \perp ao$ gezogen, so erhält man für die Koordinaten m p und o p, n u und o u folgende Gleichungen: $mp^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - op^2)$, $nu^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - ou^2)$, daher $mp^2 : nu^2 = a^2 - op^2 : a^2 - ou^2 = (a + op)(a - op) : (a + ou)(a - ou)$, oder

$mp^2 : nu^2 = (bo + op)(ao - op) : (bo + ou)(ao - ou) =$

b p . a p : b u . a u. Derselbe Satz läßt sich auch rücksichtlich der zweiten Achse beweisen.

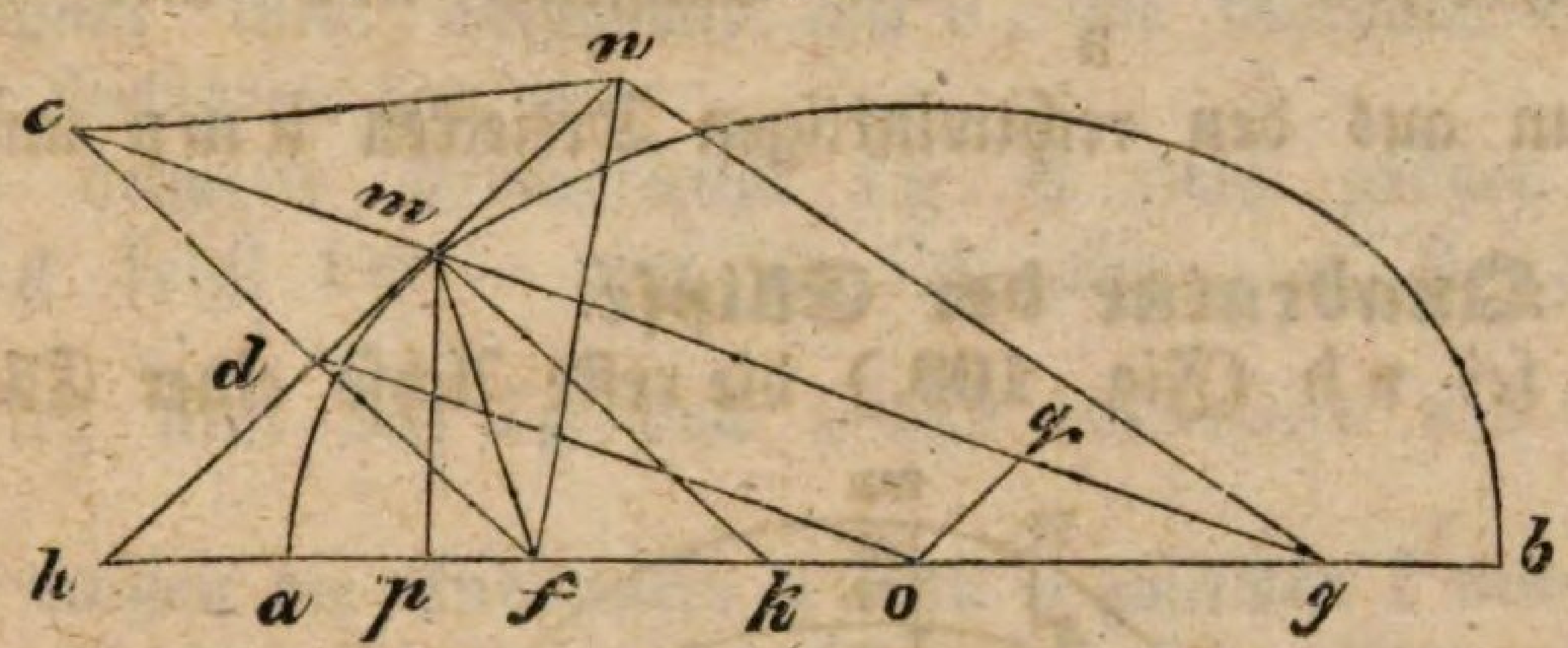
4) Setzt man in der Gleichung der Ellipse $a = b$, in welchem Falle $e = o$ sein muß, so ergibt sich $y^2 = a^2 - x^2$ oder $x^2 + y^2 = a^2$, die Gleichung des Kreises, dessen Radius a ist; der Kreis kann also als eine Ellipse, deren beide Halbachsen gleich sind, oder deren Excentricität $= o$ ist, betrachtet werden.

§. 84. Von der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale.

1) Die Summe der Abstände $vf + vg$ (Fig. 101.) eines außerhalb der Ellipse liegenden Punktes v von den beiden Brennpunkten f und g ist stets größer als die erste Achse; denn die Gerade vg muß offenbar die Ellipse in w schneiden, und verbindet man diesen Punkt mit f, so folgt $wf + wg = 2a$; aber es ist nach §. 18. 1. $vf + vg > wf + wg$, daher auch $vf + vg > 2a$. Eben so läßt sich auch beweisen, daß, wenn v innerhalb der Ellipse angenommen würde, $vf + vg < 2a$ sein müßte.

2) Es soll zum Punkte m (Fig. 102.) eine Tangente, also eine

Fig. 102.



Gerade, welche noch so weit verlängert mit der Ellipse nur diesen Punkt gemeinschaftlich hat, gezogen werden. Man ziehe die Vektoren fm und mg, verlängere letztern so, daß $mc = mf$ werde, verbinde c mit f, halbire cf in d und ziehe die Gerade md; so ist sie die verlangte Tangente. Jeder andere Punkt der md, z. B. n, liegt nämlich außerhalb der Ellipse. Um dieß zu beweisen, ziehe man noch ng, nc und nf, so folgt $nc + ng > cg$, oder da $cg = cm + mg = mf + mg = 2a$ ist, wird $nc + ng > 2a$. Aber md verbindet die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks cmf mit dem Mittelpunkte d der Basis, also ist $nd \perp cf$, daher wegen $cd = df$ und $nd = nd$ das $\triangle cnd \cong fnd$, somit $nc = fn$. Es ist also auch $fn + ng > 2a$, daher liegt n außerhalb der Ellipse.

3) Das Stück der Tangente zwischen m und der Abscissenachse, nämlich mh, heißt vorzugsweise Tangente von m, und ist $mk \perp mh$, so wird mk die Normale von m genannt; zieht man endlich die Ordinate mp, so heißt das Segment hp Subtangente, pk aber Subnormale von m.

4) Die Subtangente läßt sich nun auf folgende Art bestimmen. Man ziehe do, so ist wegen $cd = df$ und $fo = og$, nach §. 31. 1. $do \parallel cg$ und $\triangle fdo \sim \triangle fcg$, daher $do = \frac{gc}{2} = \frac{2a}{2} = a$; ist

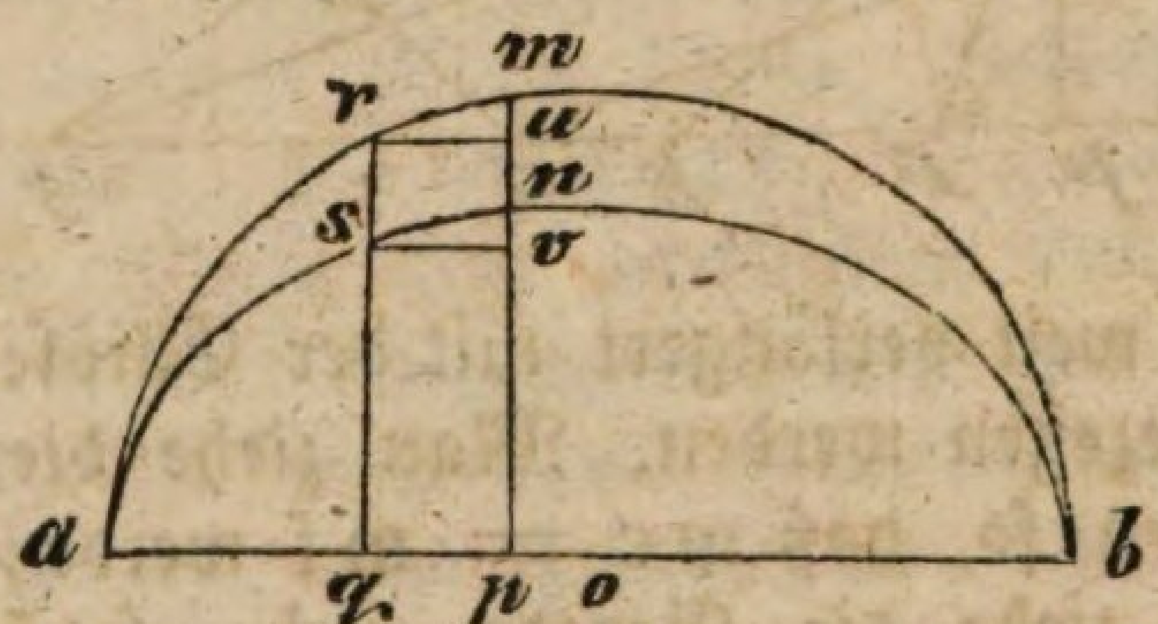
nun oq || mh, so folgt $mq = do = a$, also $gq = mg - mq = a + \frac{ex}{a} - a = \frac{ex}{a}$ Aus den ähnlichen Dreiecken hdo und goq aber ergibt sich $ho : do = og : gq$ oder $ho : a = e : \frac{ex}{a}$, somit $ho = \frac{a^2}{x}$; daher die Subtangente $hp = ho - op = \frac{a^2}{x} - x = \frac{a^2 - x^2}{x}$

5) Zur Bestimmung der Subnormale findet man aus dem rechtwinkligen $\triangle$ hmk nach §. 32. 4. $mp^2 = hp \cdot pk$; nun ist aber vermöge der Gleichung der Ellipse $mp^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; folglich ergibt sich durch Substitution dieses und des früher für hp gefundenen Werthes $pk = \frac{y^2}{hp} = \frac{b^2 x}{a^2}$ Allein es ist nach §. 83. 2. $\frac{b^2}{a} = p$, daher $pk = \frac{px}{a}$ Die Tangente mh und Normale mk lassen sich nun aus den rechtwinkligen Dreiecken hmp und kmp leicht berechnen.

§. 85. **Quadratur der Ellipse.**

1) Es sei ab (Fig. 103.) die erste Achse einer Ellipse, also =

Fig. 103.



2 a, und auch zugleich der Durchmesser eines Kreises, dessen Radius daher = a ist; ferner sei die Ordinate mp, welche die Ellipse in n schneidet, gezogen; so sind die derselben Abscisse op entsprechenden Ordinaten mp und np den beiden Halbachsen a und b proportionirt. Wendet man um dieß zu beweisen die Gleichung des Kreises $y^2 = r^2 - x^2$ auf den Punkt m an, so folgt $mp^2 = a^2 - op^2$. Eben so ergibt sich, wenn die Gleichung der Ellipse auf n angewendet wird, $np^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - op^2)$, und durch Substitution des obigen Werthes $np^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot mp^2$ oder $np = \frac{b}{a} \cdot mp$, also $mp : np = a : b$.

2) Zieht man nebst der Ordinate mp auch noch die rq, welche die Ellipse in s schneidet, hierauf ru und sv || ab, so entstehen zwei Rechtecke rp und sp, welche sich wegen ihrer gemeinschaftlichen Grundseite wie ihre Höhen verhalten; folglich ergibt sich $rp : sp = rq : sq = a : b$. Denkt man sich die Ordinate rq unendlich nahe an mp gerückt, so können die Dreiecke rmu und snv vernachlässiget werden,

und es erscheint rp als ein Element der Kreisfläche, sp aber als das diesem entsprechende Element der Fläche der Ellipse. Ist nun die ganze Kreisfläche in solche Elemente getheilt, so ergeben sich eben so viele diesen entsprechende in der Ellipse; und sind F_1 F_2 F_3 . . . die Flächen der erstern, f_1, f_2, f_3, jene der letztern, so ergibt sich $F_1 : f_1 = F_2 : f_2 = F_3 : f_3 = \ldots = a : b$, daher auch $(F_1 + F_2 + F_3 + \ldots) : (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) = a : b$. Aber erstere Summe ist die Kreisfläche $= a^2 \pi$, und letztere die Fläche der Ellipse; sie sei $= E$, also folgt $a^2 \pi : E = a : b$, somit $E = a b \pi$. Die Fläche der Ellipse wird also gefunden, wenn man das Produkt der Halbachsen mit π multiplicirt.

§. 86. **Grundeigenschaften der Hyperbel.** Die Hyperbel ist eine krumme Linie, welche sich dadurch charakterisirt, daß die Differenz der Abstände eines jeden ihrer Punkte von zwei gegebenen fixen Punkten einer gegebenen Geraden gleich sei. Sind f und g (Fig. **104.**) die beiden fixen Punkte, und heißt die gegeben Gerade α, so findet daher, wenn m ein Punkt der Hyperbel ist, die Gleichung $fm - mg = \alpha$ statt. Der Mittelpunkt o von fg wird Centrum und sein Abstand of von einem der Brennpunkte Excentricität genannt; letztere bezeichnet man allgemein mit e, die Geraden fm und mg endlich heißen Vektoren von m.

1) Die doppelte Excentricität fg ist stets größer als α; denn daß $\triangle$ mfg folgt $fm - mg < fg$, also $\alpha < 2e$; daher auch $\frac{\alpha}{2} < e$. Wird nun auf fg von o aus beiderseits das Stück $\frac{\alpha}{2}$ aufgetragen, so müssen die Endpunkte a und b zwischen f und g sich befinden, $ab = \alpha$ und noch überdieß $af = bg$ sein. Nun zeigt sich, daß a ein Punkt der Hyperbel sei; denn man hat $ag - af = ag - bg = ab = \alpha$, und dasselbe folgt auch von b. Die Punkte a und b heißen Scheitel, und die Gerade ab wird erste Achse genannt. Allgemein setzt man $ab = 2a$, und dann wird $ao = bo = a$. In der Hyperbel ist also die Differenz der Vektoren eines jeden Punktes stets der ersten Achse gleich, nämlich $fm - mg = 2a$.

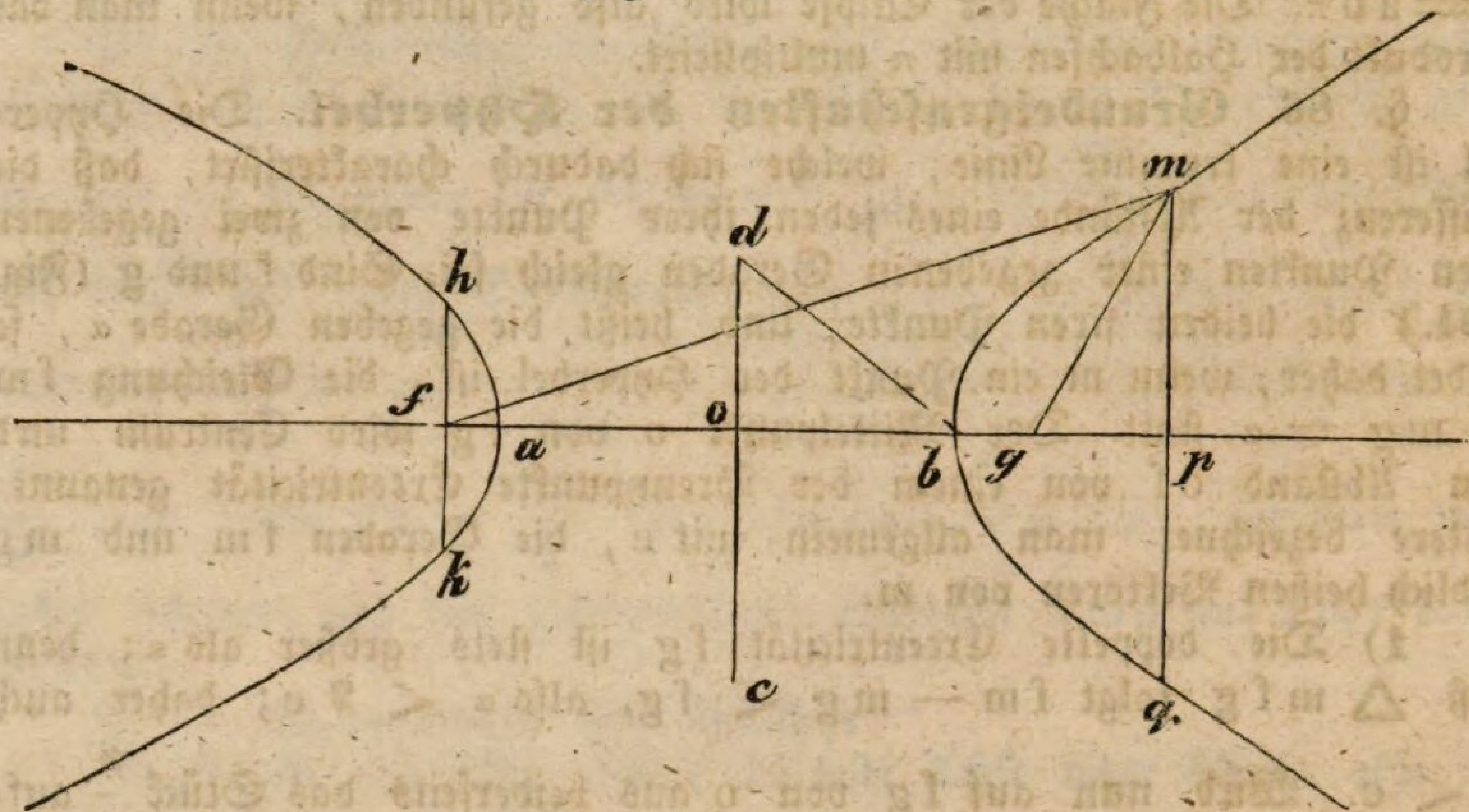
2) Zieht man $dc \perp ab$ und beschreibt von b als Centrum mit dem Radius $bd = og = e$ einen Kreis, welcher die dc in d und c schneidet, so heißt dc die zweite Achse, und da offenbar $od = oc$ ist, so muß od die halbe zweite Achse sein. Wir wollen sie $= b$ setzen. Das $\triangle$ bod gibt nun $bd^2 = bo^2 + do^2$ oder $e^2 = a^2 + b^2$. Das Quadrat der Excentricität ist also gleich der Summe der Quadrate der beiden Halbachsen.

§. 87. **Berechnung der Vektoren.** Es sei die Hyperbel durch die Größen a und e gegeben, und auf rechtwinklige Koordinaten, deren Anfangspunkt o und Abscissenachse fg ist, bezogen; ferner $mp \perp fg$ und durch die Abscisse $op = x$ der Punkt m bestimmt; man soll hieraus die Vektoren fm und mg berechnen. Die Dreiecke fmp und gmp geben wie im §. **81.** $fm^2 - mg^2 = fp^2 - gp^2$ oder $(fm + mg)(fm - mg) = (fp + pg)(fp - pg)$. Da aber $fm - mg = 2a$, $fp = e + x$ und $gp = x - e$ ist, so folgt $fm + mg$

$= \frac{2ex}{a}$. Aus der Summe der Vektoren und ihrer Differenz ergibt sich endlich $fm = \frac{ex}{a} + a$, $mg = \frac{ex}{a} - a$.

§. 88. **Gleichung der Hyperbel.** Bestimmt man, um die Gleichung der Hyperbel zu finden, aus dem $\triangle$ gmp (Fig. 104.) die

Fig. 104.



Ordinate mp, so erhält man $mp^2 = gm^2 - gp^2$ oder $mp^2 = (gm + pg)(gm - pg)$. Nun ist aber $mp = y$, $mg = \frac{ex}{a} - a$, $gp = x - e$, folglich ergibt sich nach Substitution dieser Werthe, ganz so wie im §. 82., $y^2 = \frac{(e^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; denn nach §. 86. 2. ist $e^2 - a^2 = b^2$.

§. 89. **Folgerungen.** 1) Bestimmt man aus der eben entwickelten Gleichung den Werth von y (Fig. 104.), so ergibt sich $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Wegen der zweiten Potenz von x kann jede Abscisse sowohl positiv als negativ genommen werden, ohne daß dadurch y eine Aenderung erfährt, und jedem Werthe von x entsprechen zwei gleiche und entgegensetzte von y. Ist nun $x < a$, so wird y unmöglich; daher es für solche Abscissen keine Punkte der Hyperbel gibt. Wird aber $x = \pm a$ gesetzt, so wird $y = 0$; wenn man also die Abscissen $oa = + a$ und $ob = - a$ abschneidet, so sind a und b Punkte der Hyperbel. Läßt man $x > a$ sein, so ergeben sich für y zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von bestimmter Größe, und zwar sowohl für $+ x$ als auch für $- x$. Die erste Achse halbirt also alle auf ihr senkrechten Sehnen; und da links und rechts der zweiten Achse zu gleichen Abscissen gleiche Ordinaten gehören, so besteht die

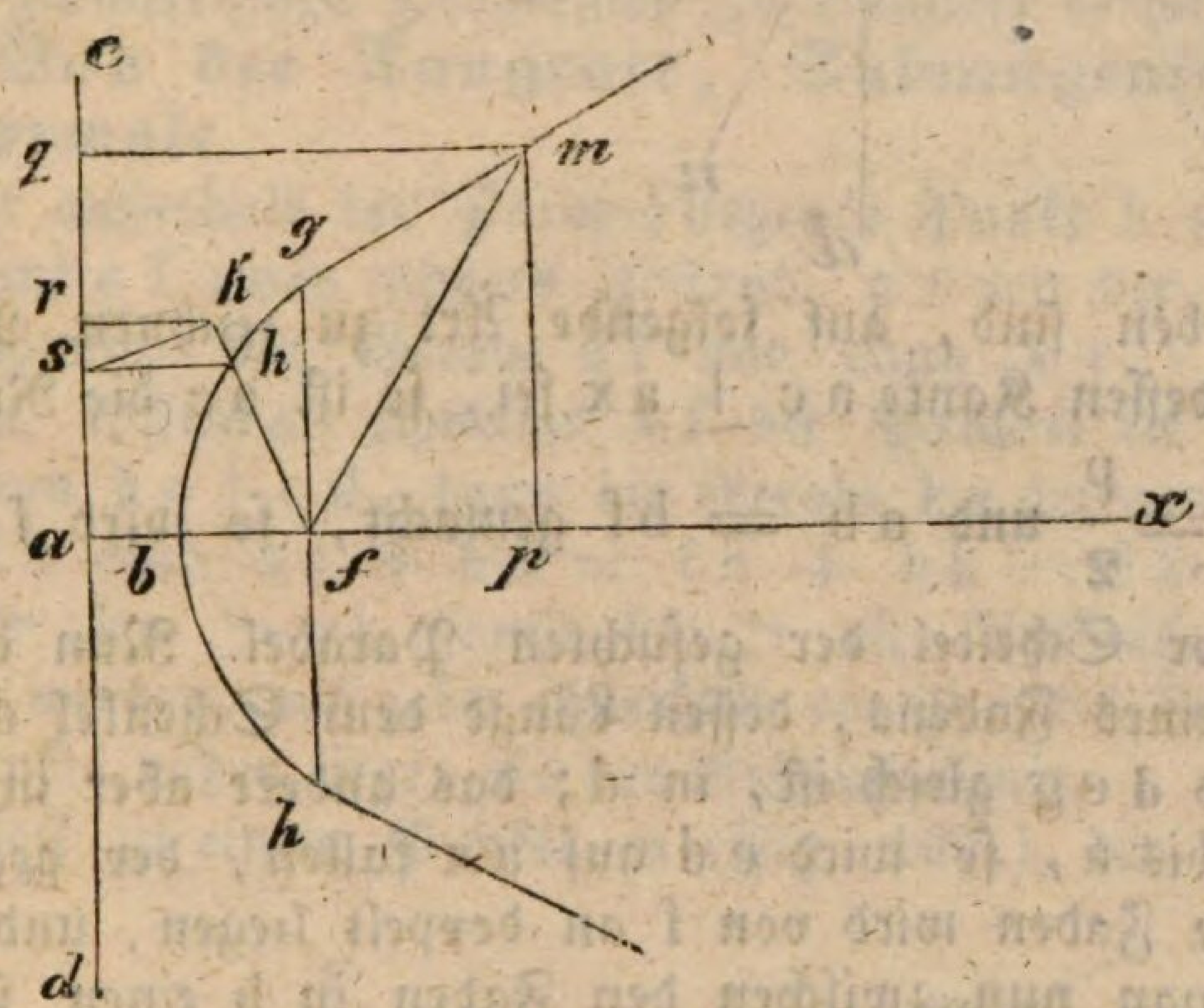
Hyperbel aus vier, ober- und unterhalb der positiven und negativen Abscissen liegenden kongruenten Theilen, für $x = \pm \infty$ wird auch $y = \pm \infty$; jene vier Aeste der Hyperbel dehnen sich also ins Unendliche aus.

2) Die durch den Brennpunkt gehende, auf der ersten Achse senkrecht stehende Sehne hk heißt Parameter; also ist hf die Hälfte desselben. Wird nun diese mit p bezeichnet, und in der Gleichung der Hyperbel $x = e$ gesetzt, so folgt $y = hf = p$, daher $p^2 = \frac{b^2}{a^2}(e^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} \cdot b^2 = \frac{b^4}{a^2}$; somit $p = \frac{b^2}{a}$, folglich $a : b = b : p$.

Der halbe Parameter ist also auch hier die dritte Proportionale zur ersten und zweiten Halbachse.

§. 90. **Grundeigenschaften der Parabel.** Die Parabel ist eine krumme Linie, in der jeder Punkt von einer Geraden und einem außerhalb derselben liegenden fixen Punkte gleichweit absteht. Die Gerade heißt Richtungslinie; der Punkt, Brennpunkt. Ist nun cd (Fig. 105.) die erstere und f der letztere, ferner m ein Punkt der

Fig. 105.



Parabel, so muß, wenn man $mq \perp cd$ und fm zieht, $mq = fm$ sein. Die Gerade fm heißt Vektor von m. Die durch den Brennpunkt f gehende, auf der Richtungslinie cd senkrecht stehende Gerade ax wird Achse der Parabel genannt, und macht man $ab = bf$, so ist b ein Punkt der letztern; er heißt Scheitel der Parabel.

1) Wird in der durch f auf ax senkrecht gezogenen Geraden gh, $fg = fh = af$ angenommen, so sind g und h Punkte der Parabel, und diese durch den Brennpunkt gehende, auf der Achse senkrecht stehende Sehne heißt Parameter. Setzt man nun $gh = p$, so ist $gf = \frac{p}{2}$ und $ab = bf = \frac{af}{2} = \frac{gf}{2} = \frac{p}{4}$. Der Abstand des Scheitels vom Brennpunkte oder von der Richtungslinie ist also der vierte Theil des Parameters.

2) Wird die Parabel auf rechtwinklige Koordinaten, deren Abscissenachse ax und Anfangspunkt b ist, bezogen, ferner $mp \perp ax$ errich-

tet; so ist $bp = x$ die Absciſſe von m, und da m ein Punkt der Parabel ist, so folgt $fm = mq = ap = bp + ab = x + \frac{p}{4}$. Der Vektor eines Punktes ist also gleich der Absciſſe desselben, mehr dem vierten Theile des Parameters.

§. 91. **Methode die Parabel zu zeichnen.** Die bereits entwickelten Eigenschaften geben uns ein Mittel an die Hand, die Parabel, wenn die Lage ax (Fig. 106.) ihrer Achse und der Parameter

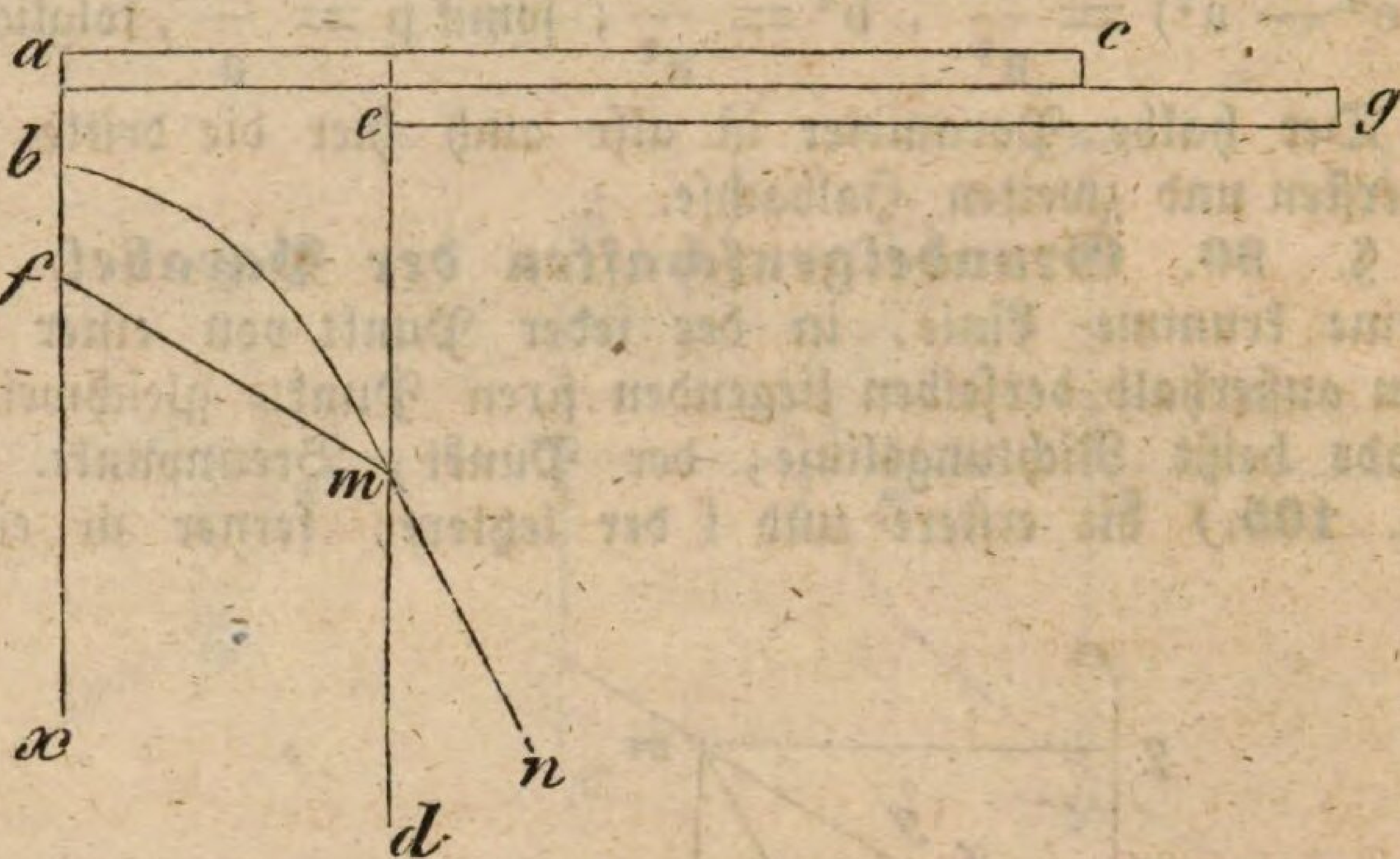


Fig. 106.

p derselben gegeben sind, auf folgende Art zu zeichnen. Man lege ein Lineal so, daß dessen Kante $ac \perp ax$ sei, so ist ac die Richtungslinie; wird hierauf $af = \frac{p}{2}$ und $ab = bf$ gemacht, so wird f der Brennpunkt und b der Scheitel der gesuchten Parabel. Nun befestige man das eine Ende eines Fadens, dessen Länge dem Schenkel de des rechtwinkligen Lineals deg gleich ist, in d; das andere aber in f und rücke deg längs ac bis a, so wird ed auf ax fallen, der gegen a gleichmäßig gespannte Faden wird von f an doppelt liegen, und genau bis b reichen. Setzt man nun zwischen den Faden in b einen Bleistift ein, dessen Spitze stets jenem Punkte folgt, in welchem der Faden, wenn das Lineal deg langsam längs ac gegen c geschoben wird, den Schenkel de verläßt; so ist die bei stets gleichmäßiger Spannung des Fadens erhaltene krumme Linie ein Ast der Parabel. Betrachtet man, um dieß zu beweisen, einen der erhaltenen Punkte, z. B. m, so ergibt sich $fm + md = em + md$, also $fm = em$. Auf dieselbe Art kann auch der andere links der Achse ax liegende Theil der Parabel gezeichnet werden.

§. 92. **Gleichung der Parabel und Folgerungen.** Wird aus dem in §. 90. 2. erhaltenen $\triangle\, fmp$ (Fig. 105.) die Ordinate $mp = y$ bestimmt, so ergibt sich $mp^2 = fm^2 - fp^2$; allein es ist $fm = x + \frac{p}{4}$, und $fp = bp - bf = x - \frac{p}{4}$, also folgt $y^2 = px$, daher $y = \pm\sqrt{px}$.

1) Für negative Werthe von x ergeben sich unmögliche Werthe

von y; somit entsprechen solchen Abscissen keine Punkte der Parabel. Jeder positiven Abscisse aber kommen zwei gleiche und entgegengesetzte Ordinaten zu, daher halbirt die Achse ax das ganze System der auf ihr senkrechten Sehnen; und da für $x = \infty$, $y = \pm \infty$ wird, so ist die Parabel eine krumme Linie, welche ober- und unterhalb der positiven Abscissen in zwei symmetrischen Aesten sich ins Unendliche ausdehnt.

2) Sind x, y, dann x_1, y_1 und x_2, y_2 die Koordinaten dreier Punkte der Parabel, deren Parameter p ist, so folgt $y^2 = px$, $y^2_1 = p x_1$ und $y^2_2 = p x_2$, daher hat man $y^2 : y^2_1 : y^2_2 = x : x_1 : x_2$. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich also, wie die zugehörigen Abscissen.

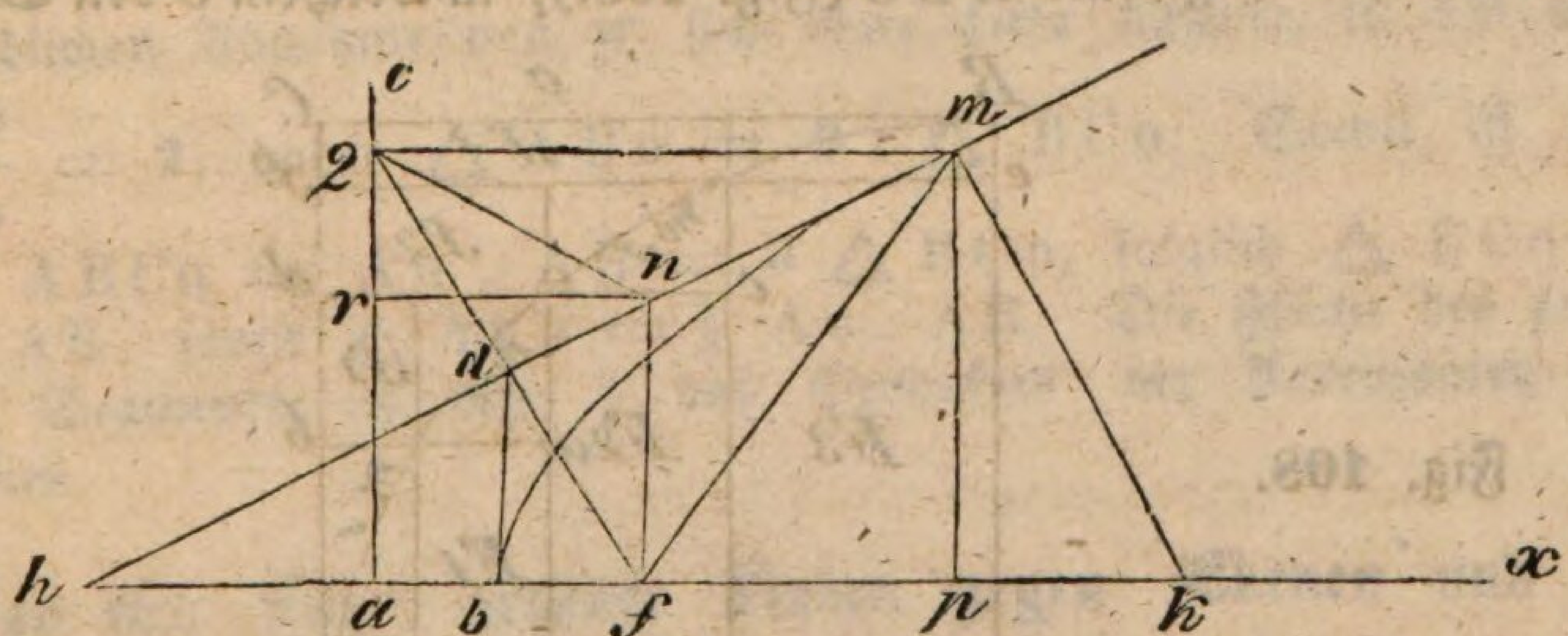
3) Schneidet man Abscissen x, x_1, x_2 ab, deren Längen durch die Quadrate der Glieder einer steigenden geometrischen Progression dargestellt werden, welche somit die Werthe a^2, $a^2 q^2$, $a^2 q^4$, wo $q > 1$ ist, annehmen, so hat man rücksichtlich der obigen Abscissen entsprechenden Ordinaten y, y_1, y_2, nach 2 den Ausdruck: $y^2 : y^2_1 : y^2_2 = a^2 : a^2 q^2 : a^2 q^4$ oder $y : y_1 : y_2 = a : aq : aq^2$. Der Natur der Parabel gemäß kann man also die Ordinaten in derselben so wählen, daß sie sich wie Glieder einer geometrischen Progression zu einander verhalten.

§. 93. Von der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale.

1) Jeder außerhalb der Parabel liegende Punkt k (Fig. 105.) hat vom Brennpunkte f einen größern Abstand, a's von der Richtungslinie; zieht man nämlich die Gerade kf und dann kr ⊥ cd, so muß kf > kr sein. Offenbar schneidet kf die Parabel in einem Punkte h, und wird nun hs ⊥ cd, dann die Gerade ks gezogen; so folgt wegen hs = fh auch hs + hk = fh + hk = fk, allein es ist hs + kh > ks > rk, somit fk > rk. Auf ähnliche Art kann auch bewiesen werden, daß jeder innerhalb der Parabel befindliche Punkt dem Brennpunkte näher liege, als der Richtungslinie.

2) Es soll zu einem Punkte m (Fig. 107.) der Parabel, deren

Fig. 107.



Achse ax, Scheitel b, Brennpunkt f und Richtungslinie ac ist, ein Tangente gezogen werden. Man ziehe den Vektor fm, dann mq ⊥ ac hierauf die Gerade fq und verbinde den Mittelpunkt d der Basis fq des gleichschenkligen Dreiecks mfq mit m; so ist md die verlangte Tangente. Um dieß zu beweisen, nehme man in md einen beliebigen Punkt n an, verbinde ihn mit f und q und ziehe nr ⊥ ac, so ist wegen dq = df, nd = nd und md ⊥ fq, das △ ndq ≅ ndf,

also $nq = nf$. Da aber $nq > nr$ ist, so folgt auch $nf > nr$. Der Punkt n liegt also außerhalb der Parabel und dasselbe kann auch von jedem andern Punkte der Geraden md mit Ausnahme von m bewiesen werden.

3) Zieht man die Ordinate mp, so ist hp die Subtangente von m, und um diese zu berechnen, verbinde man d mit b, so folgt wegen $dq = df$ und $ba = bf$, $bd \parallel aq$, daher $bd = \frac{aq}{2} = \frac{mp}{2}$. Nun ist aber das $\triangle mhp \sim dhb$, also wegen $bd = \frac{mp}{2}$ auch $hb = \frac{hp}{2} = bp$, somit $hp = 2x$. Die Subtangente ist also der doppelten Abscisse gleich.

4) Wird $mk \perp mh$ errichtet, so ist pk die Subnormale von m und aus $\triangle hmk$ folgt nun $mp^2 = hp \cdot pk$, also $pk = \frac{mp^2}{hp}$ es ist aber $hp = 2x$ und $mp^2 = y^2 = px$, wenn p den Parameter vorstellt, somit ergibt sich $pk = \frac{p}{2}$ Die Subnormale ist also dem halben Parameter gleich.

5) Aus den Dreiecken mhp und mkp lassen sich nun die Tangente und Normale berechnen; das erstere gibt nämlich $mh^2 = mp^2 + hp^2 = px + 4x^2 = 4x\,(x + \frac{p}{4}) = 4x \,.\, fm$, also $mh = 2\sqrt{x \,.\, fm}$. Aus $\triangle mpk$ aber folgt $mk^2 = mp^2 + pk^2 = px + \frac{p^2}{4} = p\,(x + \frac{p}{4}) = p \,.\, fm$, also $mk = \sqrt{p \,.\, fm}$.

§. 94. **Quadratur der Parabel.** Es soll die Fläche des parabolischen Segments ABO (Fig. 108.), in welchem O den Scheitel und

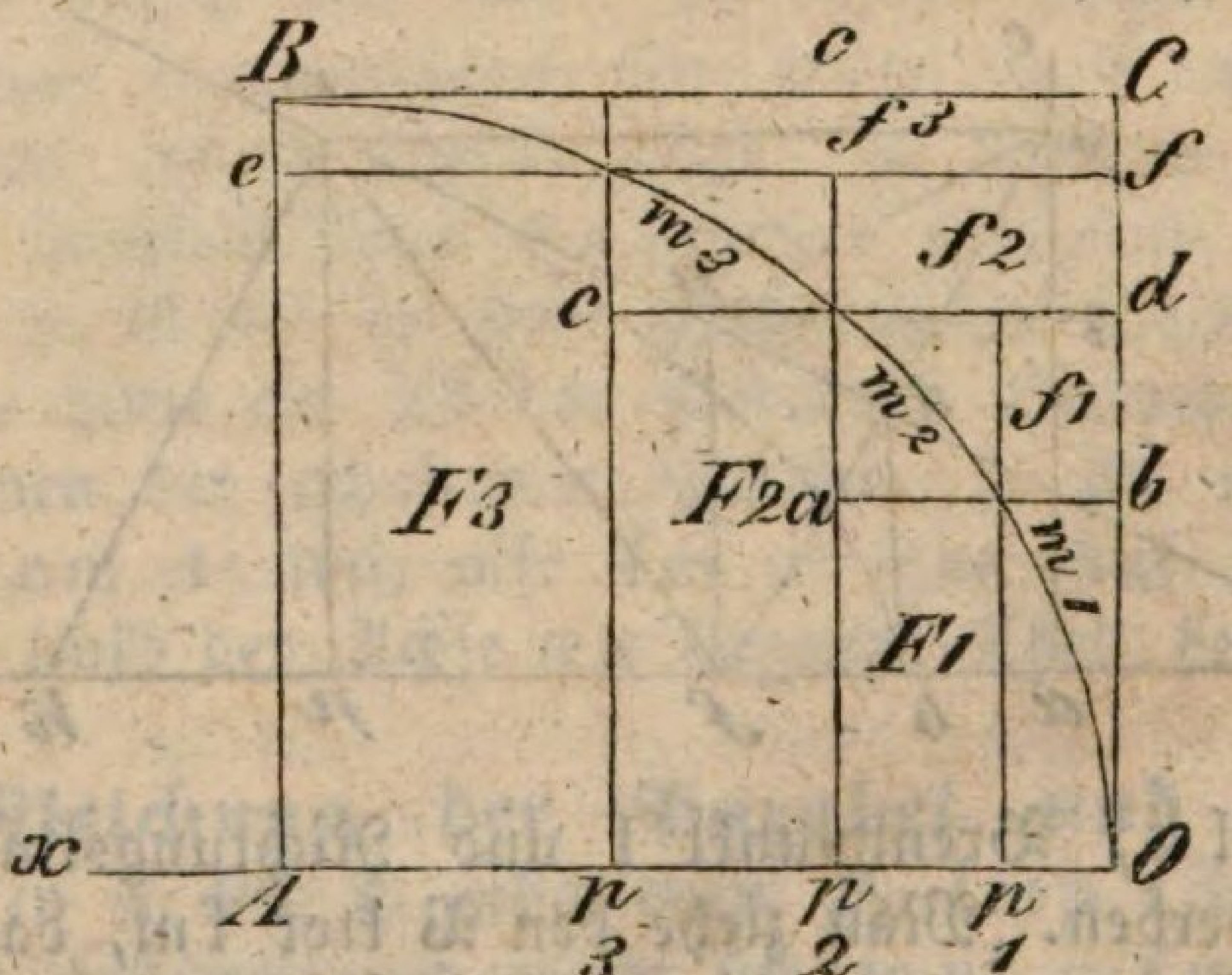


Fig. 108.

Ox die Achse vorstellt, berechnet werden. Dem im §. 92. 3. aufgestellten Beweise zufolge lassen sich die Ordinaten so wählen, daß sie sich wie Glieder einer geometrischen Progression verhalten; sind nun die den Abscissen $op_1 = x_1$, $op_2 = x_2$, $op_3 = x_3$ entsprechenden Ordina-

ten $m_1 p_1 = y_1$, $m_2 p_2 = y_2$, $m_3 p_3 = y_3$ von der erwähnten Beschaffenheit, so ergibt sich, wenn der Quotient dieser Progression, da er größer als die Einheit ist, durch $1 + w$ bezeichnet wird, $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_3}{y_2} = \ldots = 1 + w$. Wird nun das Rechteck A B C O gezeichnet, und zieht man durch m_1, m_2, m_3 die mit A O parallelen Geraden a b, c d, e f, so ergibt sich, wenn die mit F_1 und f_1 bezeichneten Rechtecke berechnet werden, $F_1 = y_1 (x_2 - x_1)$, $f_1 = x_1 (y_2 - y_1)$, also $\frac{F_1}{f_1} = \frac{y_1 (x_2 - x_1)}{x_1 (y_2 - y_1)}$. Es ist aber, wenn p den Parameter vorstellt, $y^2_1 = p \,.\, x_1$ und $y_2{}^2 = p \,.\, x_2$, also $y_2{}^2 - y_1{}^2 = p\,(x_2 - x_1)$, daher $x_2 - x_1 = \frac{y_2{}^2 - y_1{}^2}{p}$ also erhält man durch Substitution dieses Werthes

$$\frac{F_1}{f_1} = \frac{y_1 (y^2_2 - y^2_1)}{p x_1 (y_2 - y_1)} = \frac{y_1 (y_2 + y_1)}{y^2_1} = \frac{y_2 + y_1}{y_1} = 1 + \frac{y_2}{y_1}$$

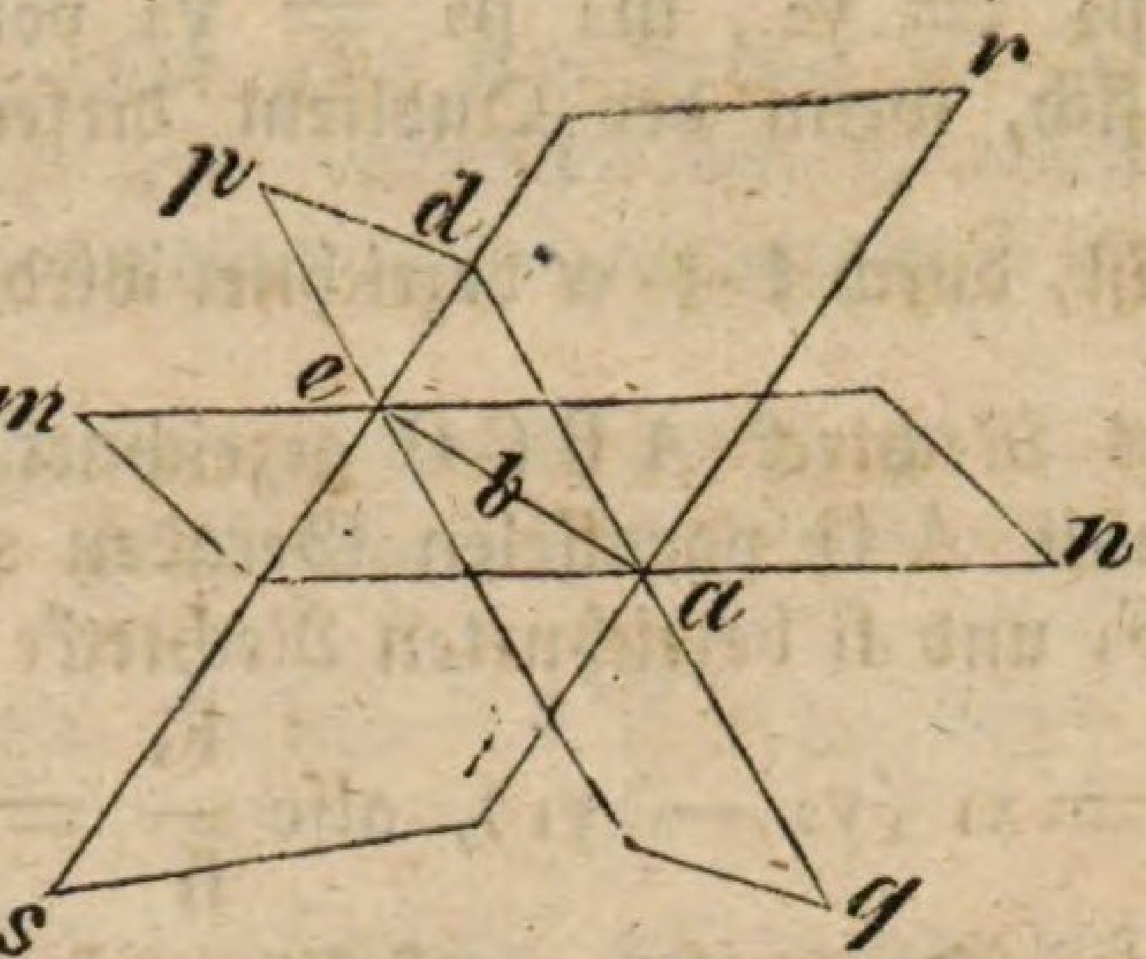
Auf dieselbe Art zeigt sich $\frac{F_2}{f_2} = 1 + \frac{y_3}{y_2}$, $\frac{F_3}{f_3} = 1 + \frac{y_4}{y_3}$, somit ist $\frac{F_1}{f_1} = \frac{F_2}{f_2} = \frac{F_3}{f_3} = 1 + \frac{y_2}{y_1} = 2 + w$, und daher $\frac{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots} = 2 + w$. Je kleiner w ist, desto näher rücken die Ordinaten aneinander, desto mehr nähern sich daher die Größen $F_1\ F_2\ F_3 \ldots$ und $f_1\ f_2\ f_3 \ldots$ den Elementen der parabolischen Flächen A B o und B C o, und desto mehr nähert sich also der Ausdruck $\frac{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots}{f_1 + f_2 + f_5 + \ldots}$ dem Bruche $\frac{\triangle ABo}{\triangle BCo}$ Geht man nun in obiger Gleichung auf die Grenzen über, welchen die beiderseits des Gleichheitszeichens stehenden Ausdrücke bei der unendlichen Abnahme von w sich ohne Ende nähern, so hat man $\frac{\triangle ABo}{\triangle BCo} = 2$, daher $\triangle ABo = 2 \,.\, \triangle BCo$. Somit ist das Rechteck $ABCo = Ao \,.\, AB = 3 \triangle BCo$, folglich $\triangle BCo = \frac{1}{3} Ao \,.\, AB$, somit $\triangle ABo = \frac{2}{3} Ao \,.\, AB$. Die Fläche des parabolischen Segments ist also $\frac{2}{3}$ des Produktes der Koordinaten des Endpunktes.

X. Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen und der Letztern zu einander.

§. 95. Ergebnisse aus dem Begriffe der Ebene.

1) Der Erklärung der Ebene gemäß muß die, zwei beliebige Punkte derselben verbindende Gerade stets in der nämlichen Ebene liegen. Ist a b (Fig. 109.) eine in der Ebene m n gezogene Gerade, so muß auch ihre Verlängerung in derselben Ebene sich befinden. Denn durch

Fig. 109.



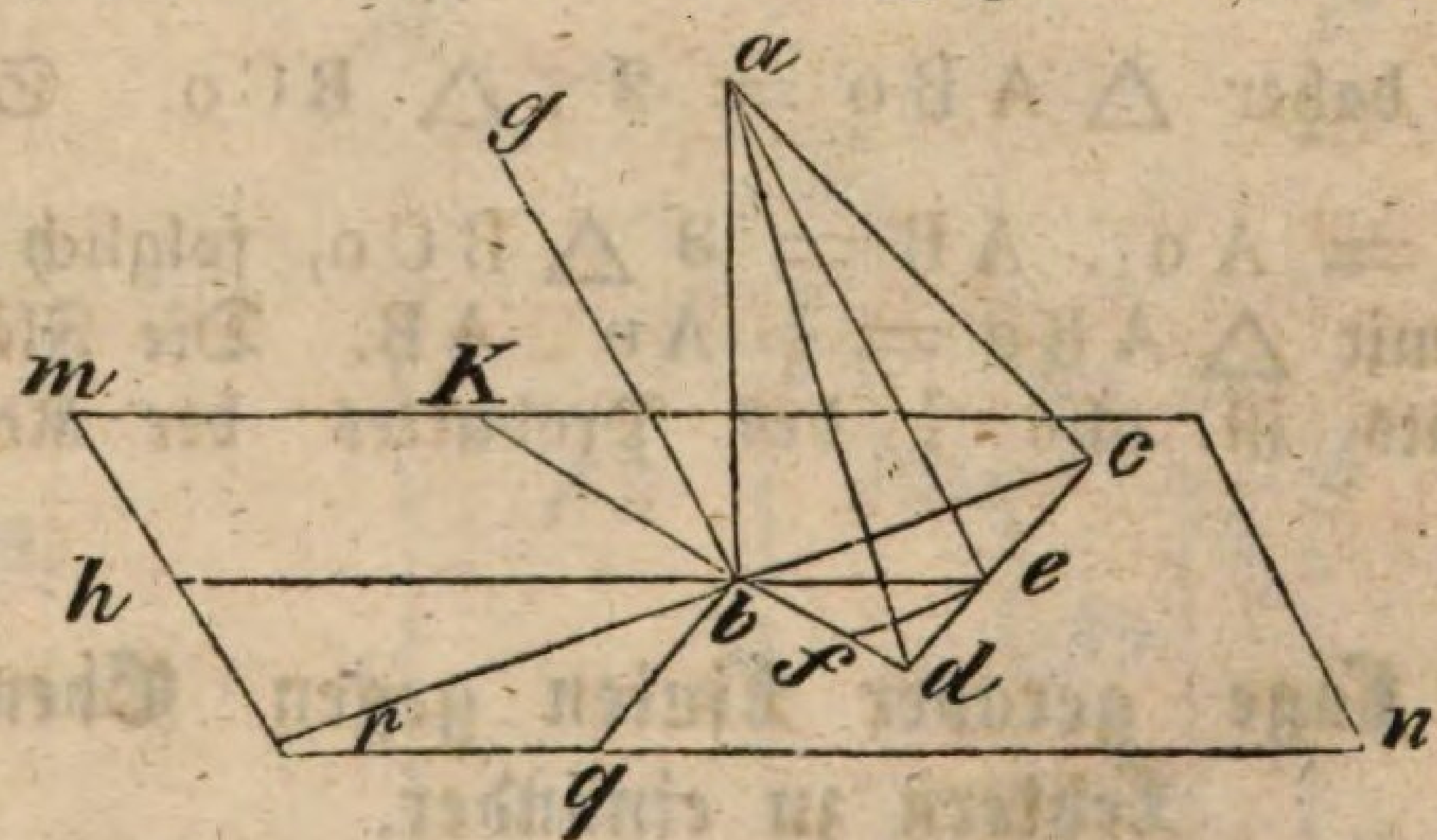
die in der Ebene m n angenommenen Punkte a und b ist die Lage der durch sie gezogenen Geraden a b vollkommen und zwar in der Art bestimmt, daß sie in der Ebene m n liegen muß; da nun die Verlängerung von a b dieselbe Lage wie a b besitzt, so muß auch diese in der Ebene m n liegen.

2) Denkt man sich die Ebene m n um eine in ihr gezogene unbewegliche Gerade a c gedreht, so kann sie unzählige Lagen p q, r s, annehmen; folglich lassen sich durch eine Gerade a c unzählige Ebenen legen, und die allen gemeinschaftliche Gerade a c heißt ihr Durchschnitt. Zwei Ebenen m n und p q müssen sich immer in einer geraden Linie schneiden; denn verbindet man zwei Punkte a und c ihres Schnittes durch eine Gerade a c, so muß diese, der Natur der Ebene gemäß, in beiden zugleich liegen, somit ihr Durchschnitt sein.

3) Unter den unzähligen Lagen, welche die Ebene m n während ihrer Drehung um a c annimmt, gibt es nur eine einzige p q, in welcher sie durch einen gegebenen, nicht in der Geraden a c liegenden Punkt d geht, aber eine Gerade a c ist durch zwei in ihr gelegene Punkte a und c bestimmt; somit kann man durch drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte eine und zwar nur eine einzige Ebene führen, und die Lage der letztern ist daher durch jene der erstern vollkommen bestimmt.

4) Durch jeden Winkel c b d (Fig. 110.) kann man eine Ebene

Fig. 110.



legen; denn wird durch die Punkte d, b und c eine Ebene m n geführt, so müssen auch die Schenkel b d und b c in derselben Ebene liegen. Zwei sich schneidende gerade Linien d k und c p liegen immer in einer Ebene; denn legt man durch den W. d b c eine solche, so müssen auch die Verlängerungen der Schenkel in der nämlichen Ebene sich befinden. Auf ähnliche Art findet man auch folgende Resultate. Wenn

zwei in einer Ebene liegende gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, so liegt auch diese in jener Ebene. Schneidet eine Gerade zwei parallele Linien, so liegen sie alle drei in derselben Ebene. Durch die drei Seiten eines Dreiecks kann man immer eine Ebene legen.

§. 96. **Senkrechte Lage gerader Linien gegen Ebenen.** Eine Gerade a b (Fig. 110.) steht senkrecht auf einer Ebene m n, wenn sie mit allen in jener Ebene durch b gezogenen geraden Linien rechte Winkel bildet.

1) Es läßt sich leicht beweisen, daß die Gerade a b, welche auf zwei gerade Linien b d und b c der genannten Art senkrecht steht, auch auf jeder dritten b e derselben Art, somit auch auf der Ebene m n senkrecht sein müsse. Um dieß auszuführen, wollen wir in b e einen beliebigen Punkt e annehmen, von diesen e f || b c ziehen, f d = b f machen, dann durch d und e die Gerade d c ziehen, und endlich a mit d, e und c verbinden. Da e f || b c und b f = d f ist, so muß auch d e = e c sein, und nun geben die Dreiecke a d c und b d c nach §. 41. 2. $ac^2 + ad^2 = 2\,ae^2 + 2\,.\,ec^2$ und $bc^2 + bd^2 = 2\,.\,be^2 + 2\,.\,ec^2$. Durch Subtraktion dieser Gleichungen ergibt sich $ac^2 - bc^2 + ad^2 - bd^2 = 2\,(ae^2 - be^2)$, nun ist aber $ac^2 - bc^2 = ab^2$ und $ad^2 - bd^2 = ab^2$, somit folgt $2\,.\,ab^2 = 2\,(ae^2 - be^2)$ oder $ae^2 = ab^2 + be^2$, daher nach §. 32. 3. $ab \perp be$.

2) Steht eine Gerade a b auf einer Ebene m n senkrecht, so muß jede andere von b gezogene b g schief sein; denn legt man durch den W. a b g eine Ebene, welche die m n in b h schneidet, so ist W. a b h = R, also W. g b h < R, daher b g schief gegen m n. Durch einen Punkt einer Ebene kann man also auf diese nur eine Senkrechte ziehen.

3) Denkt man sich von einem außerhalb einer Ebene m n liegenden Punkt a auf diese eine Senkrechte a b errichtet, so muß jede andere von a gezogene a c schief stehen. Die durch den W. b a c gelegte Ebene schneidet nämlich die m n in b c und nun ist W. a b c = R, somit W. a c b < R; auch ist jede schiefe Gerade länger als jene Senkrechte, weil a c > a b ist. Auf eine Ebene ist also von einem außer ihr gelegenen Punkte nur eine Senkrechte möglich, und diese ist die kürzeste unter allen Geraden, die von jenem Punkte zur Ebene gezogen werden können. Die Gerade a b heißt der Abstand des Punktes a von der Ebene m n.

4) Eine Gerade kann nicht auf zwei sich schneidende Ebenen senkrecht stehen. Denn es sei $ab \perp mn$ (Fig. 111.), so ist auch $ab \perp ac$;

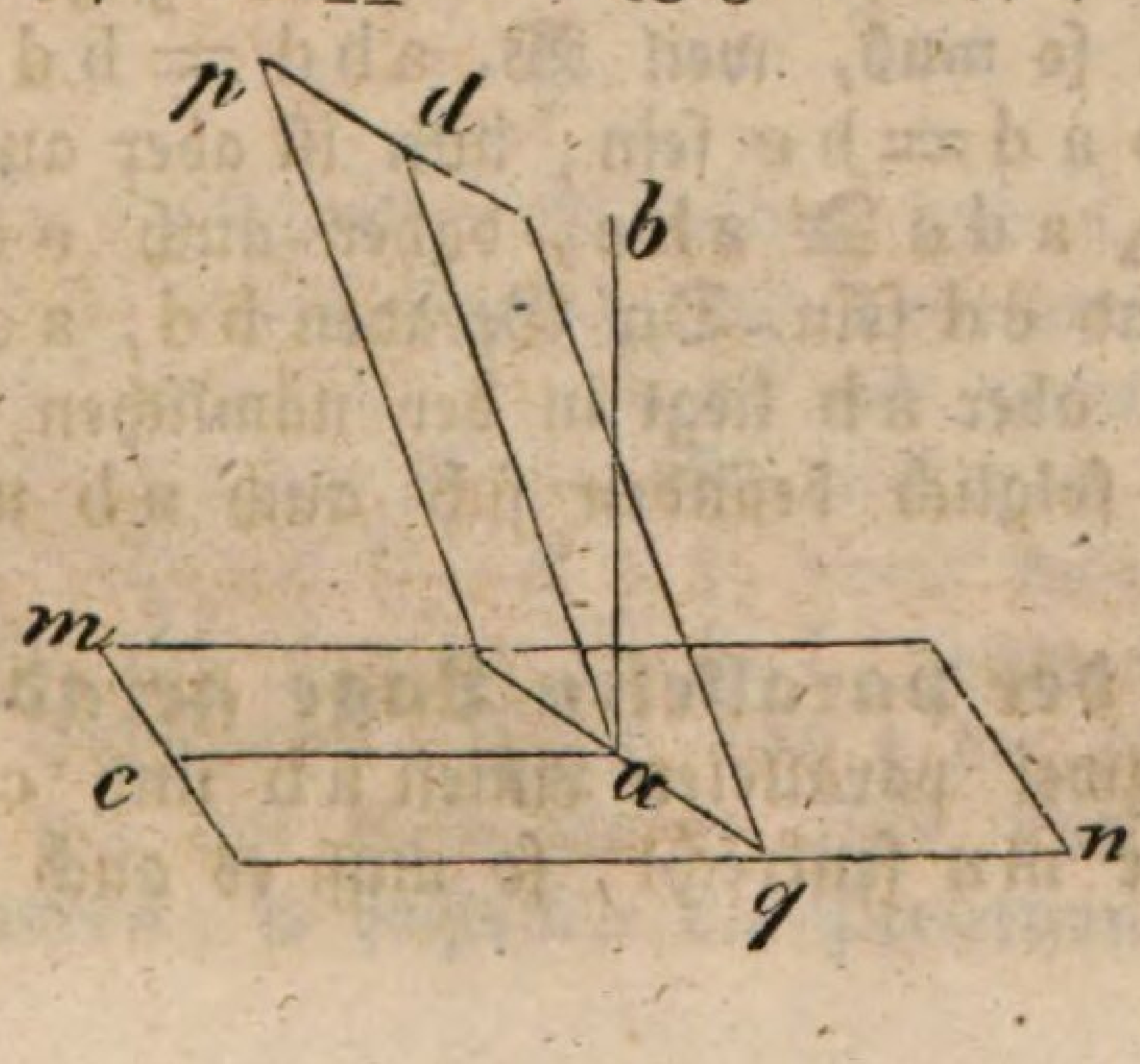


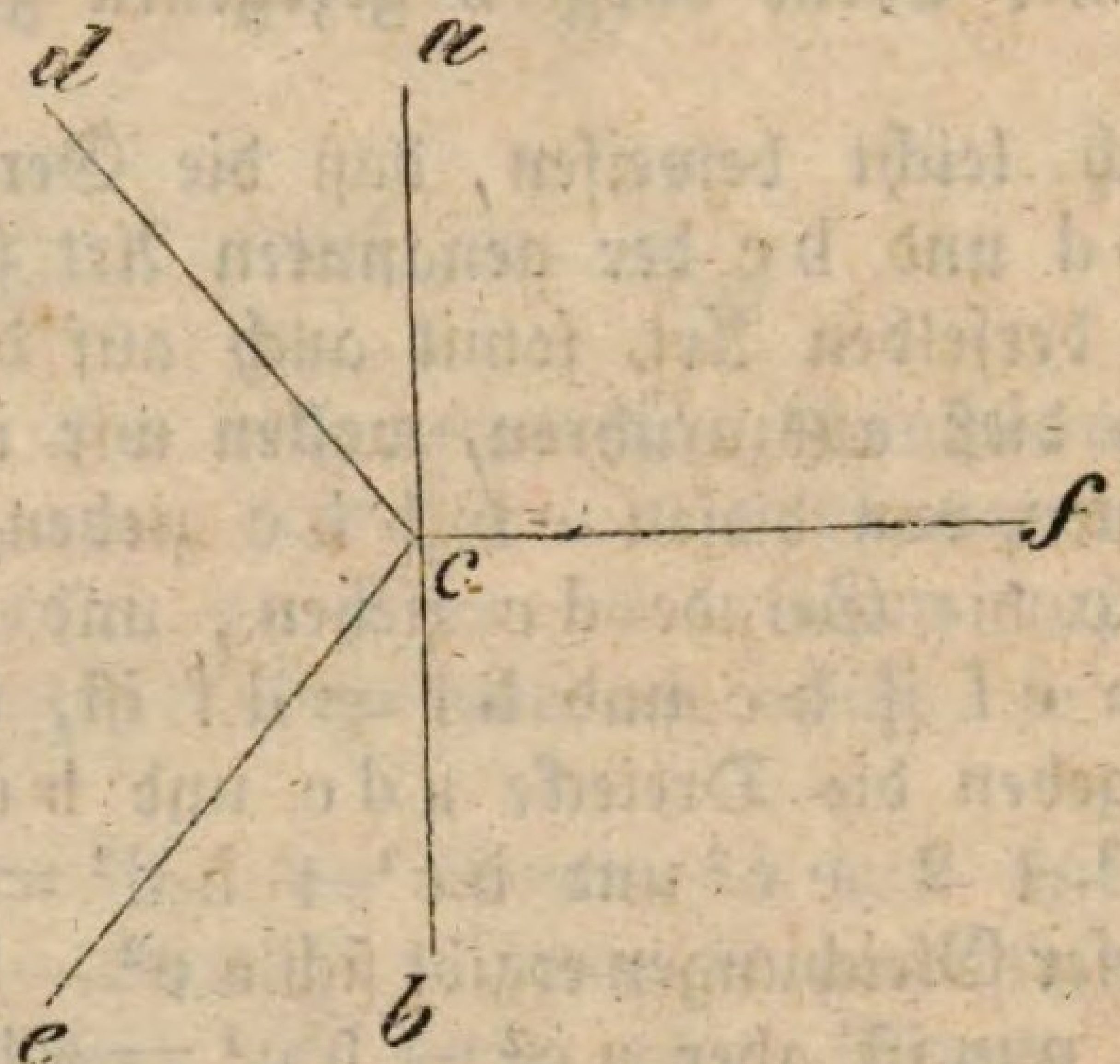
Fig. 111.

legt man nun zwischen die Schenkel ab und ac durch a die Ebene pq, und durch den W. bac eine Ebene, welche pq in ad schneidet, so muß W. bad < R, also ab schief gegen pq sein.

§. 97. **Bedingungen, unter welchen gerade Linien in einerlei Ebene liegen.**

1) Drei oder mehr von einem Punkte c (Fig. 112.) gezogene gerade

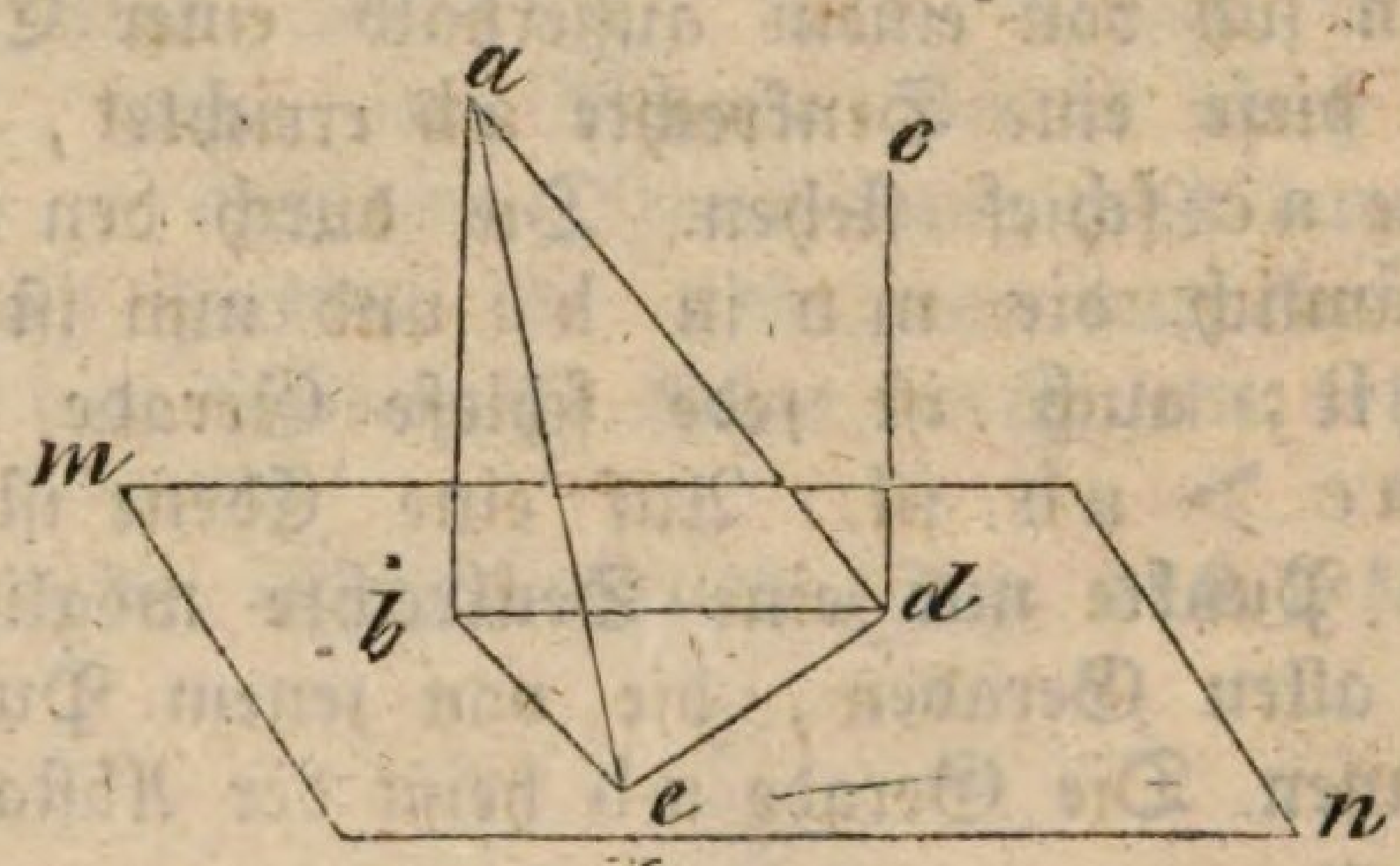
Fig. 112.



Linien cd, ce und cf, welche auf einer Geraden ab senkrecht stehen liegen in derselben Ebene. Unter unserer Voraussetzung muß nämlich ab auf den Ebenen der W. dce und ecf senkrecht sein; da aber eine Gerade auf zwei sich schneidende Ebenen nicht senkrecht sein kann, so müssen die Ebenen jener Winkel eine einzige Ebene bilden, daher jene Geraden cd, ce und cf in einerlei Ebene sich befinden.

2) Zwei auf einer Ebene mn (Fig. 113.) senkrecht stehende Gerade

Fig. 113.



ab und cd liegen in derselben Ebene. Man verbinde b mit d, errichte in mn, de ⊥ bd, mache de = ab und ziehe hierauf die Geraden ad, ae und be, so muß, weil W. abd = bde = R ist, das △ adb ≅ bde, also ad = be sein; nun ist aber auch ae = ae und de = ab, folglich △ ade ≅ abe, daher auch ad ⊥ de, also muß ed ⊥ bd, ad und cd sein. Die Geraden bd, ad und cd liegen also in derselben Ebene, aber ab liegt in der nämlichen Ebene, weil sie bd und ad schneidet, folglich befinden sich auch ab und cd in derselben Ebene.

§. 98. **Von der parallelen Lage gerader Linien.**

1) Ist von zwei parallelen Linien ab und cd (Fig. 113.) eine ab auf eine Ebene mn senkrecht, so muß es auch die andere cd sein.

Durch das §. 97. 2. angeführte Verfahren findet man wie früher, $\triangle abd \cong bde$, $\triangle ade \cong abe$ und W. $abe = ade$; nun ist W. $abc = R$, folglich W. $ade = R$ oder $ed \perp ad$. Es ist also $ed \perp bd$ und ad, somit auch auf der Ebene des W. adb; in dieser Ebene liegt aber auch cd, weil $cd \parallel ab$ ist, daher muß $ed \perp dc$ sein. Ferner ist W. $abd + bdc = 2R$, und da W. $abd = R$ ist, auch W. $bdc = R$ oder $cd \perp bd$. Die Gerade cd steht also senkrecht auf ed und bd, somit auch auf der Ebene mn.

2) Zwei Gerade ab (Fig. 113.) und cd, die auf einer Ebene mn senkrecht stehen, sind parallel. Denn sie liegen nach §. 97. 2. in derselben Ebene, und zieht man die Gerade bd, so ist W. $abd = bdc = R$, also W. $abd + bdc = 2R$, weßhalb $ab \parallel cd$ sein muß.

3) Sind von drei nicht in einer Ebene liegenden Geraden ab, cd und ef (Fig. 114.) zwei ab und ef der dritten cd parallel, so müssen

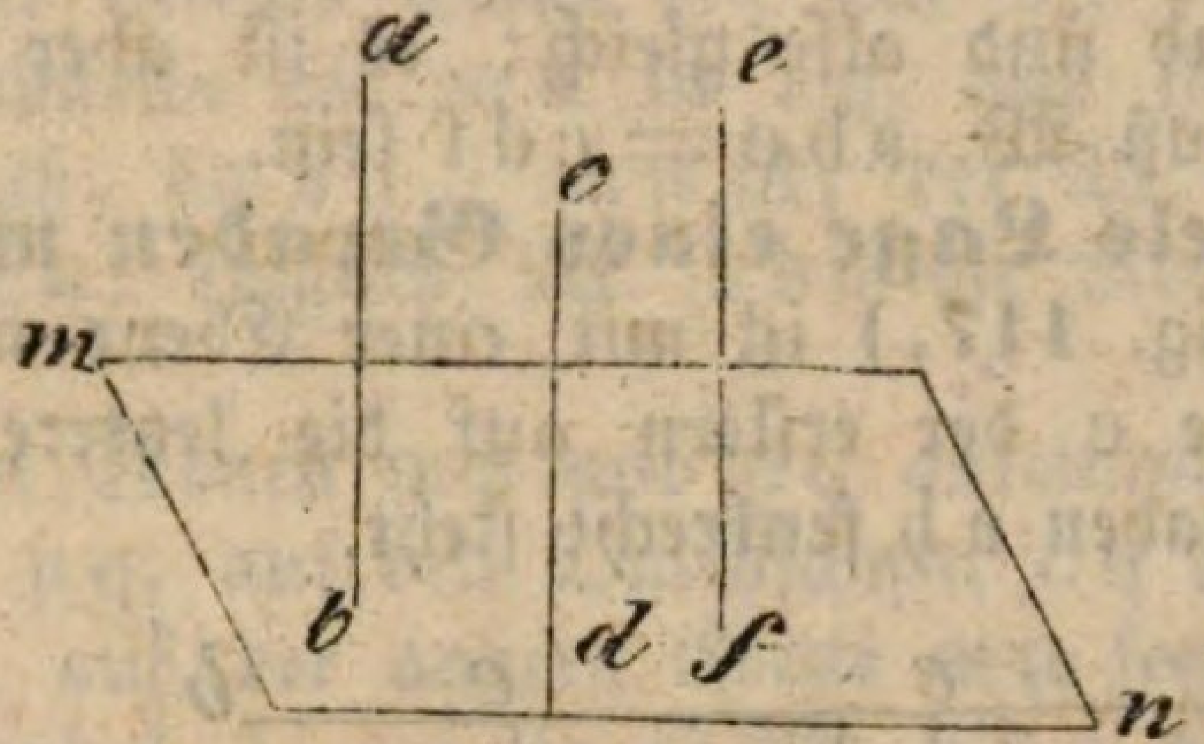


Fig. 114.

sie es auch unter sich sein. Stellt man sich vor, es sei $ab \perp mn$, so muß wegen der Voraussetzung, auch $cd \perp mn$ sein, und da $cd \parallel ef$ ist, ist ebenfalls $ef \perp mn$; nun sind ab und ef auf derselben Ebene senkrecht, folglich $ab \parallel ef$.

4) Sind die Schenkel ab und de, bc und ef (Fig. 115.) zweier

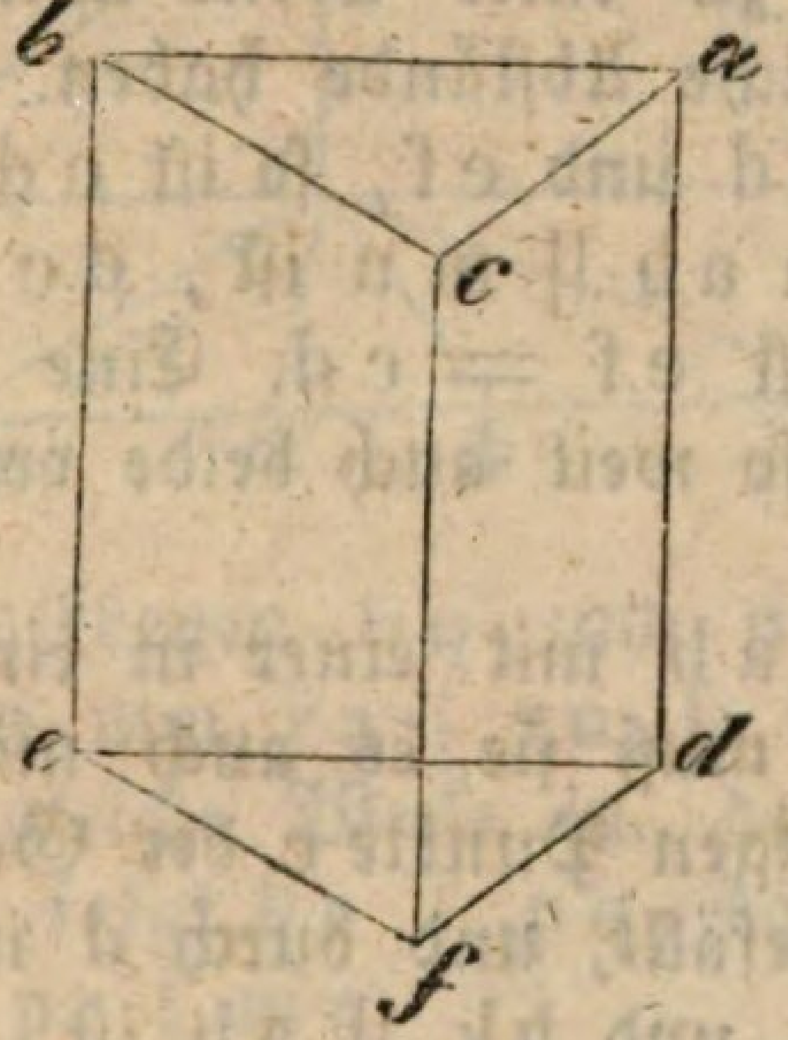


Fig. 115.

in verschiedenen Ebenen liegender W. abc und def parallele Linien, und haben diese Winkel ihre Oeffnung nach derselben Seite, so sind sie gleich. Man mache $ab = ed$, $bc = ef$ und ziehe die Geraden ad, be, cf, ac und df. Da $ab \# de$ ist, muß auch $ad \# be$ sein; da ferner $bc \# ef$ ist, ist auch $be \# cf$, somit folgt $ad \# cf$, daher $ac = fd$; es ist also das $\triangle abc \cong def$, demnach W. $abc = def$.

5) Wird vom Endpunkte a (Fig. 116.) der zur Ebene mn schief gezogenen Geraden ab auf diese Ebene eine Senkrechte ae gefällt, dann e mit b verbunden; so heißt be die Projektion von ab, und der

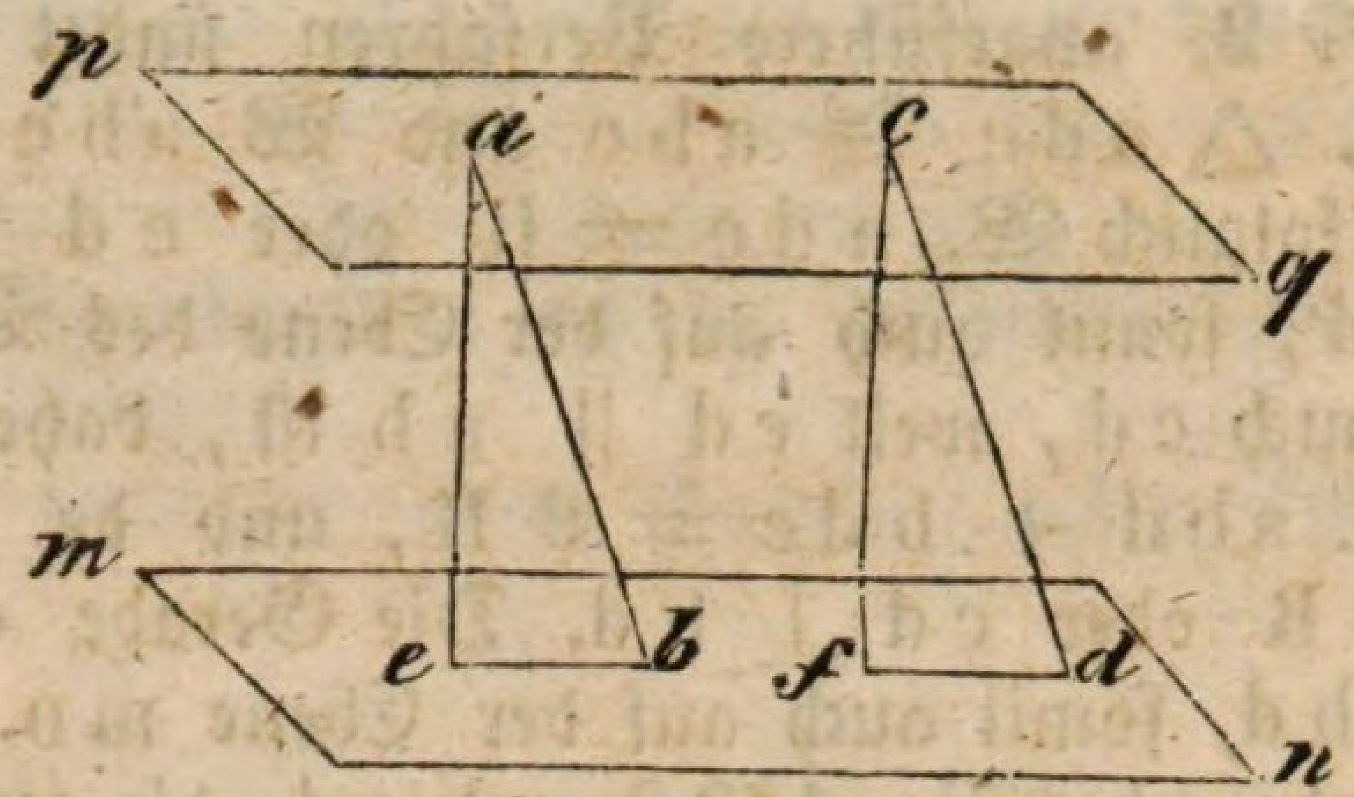


Fig. 116.

W. a b e, welchen diese Gerade a b mit ihrer Projektion bildet, wird die Neigung der a b zu m n genannt. Nun läßt sich leicht beweisen, daß parallele Linien a b und c d zu derselben Ebene m n gleiche Neigungen haben. Man denke sich noch c f ⊥ m n gefällt, und die Gerade f d gezogen, so ist der W. c d f die Neigung von c d zu m n. Da a e und c f ⊥ m n sind, so ist a e || c f, folglich haben die W. b a e und d c f parallele Schenkel und sind also gleich; es ist aber auch W. a e b = c f d = R, daher muß W. a b e = c d f sein.

§. 99. **Parallele Lage einer Geraden mit einer Ebene.** Eine Gerade a b (Fig. 117.) ist mit einer Ebene m n parallel, wenn die von jedem Punkte c der erstern auf die letztere gefällte Senkrechte c d auch auf der Geraden a b senkrecht steht.

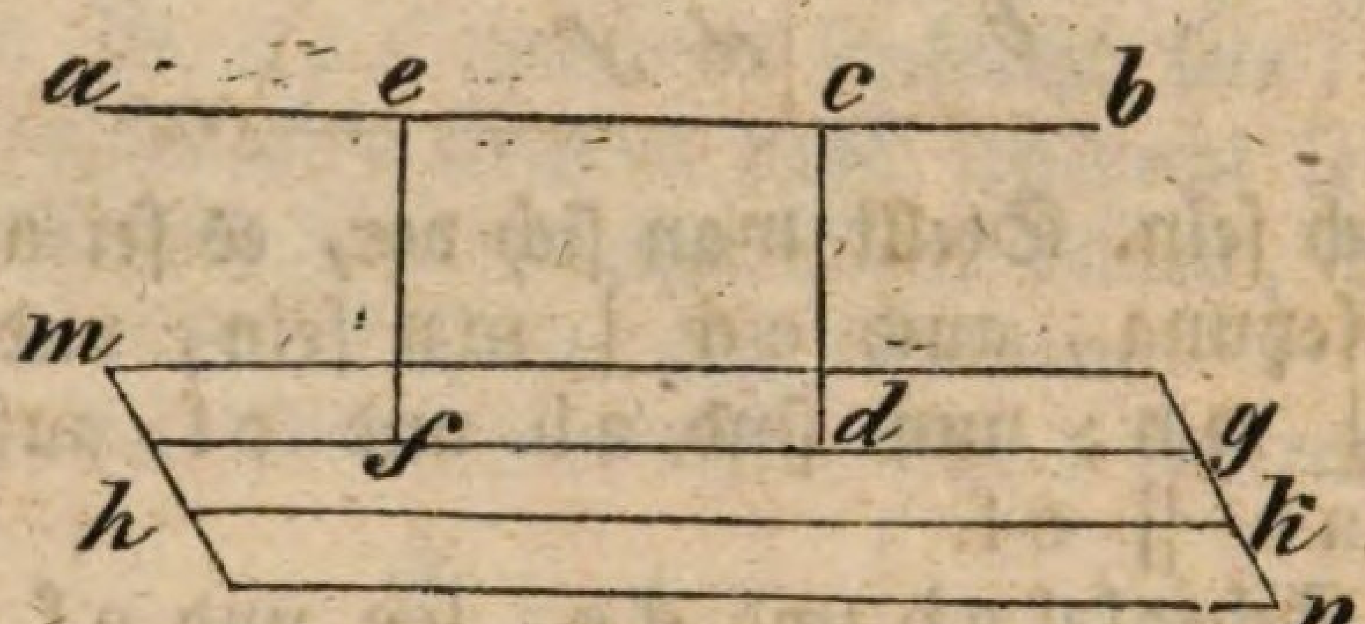


Fig. 117.

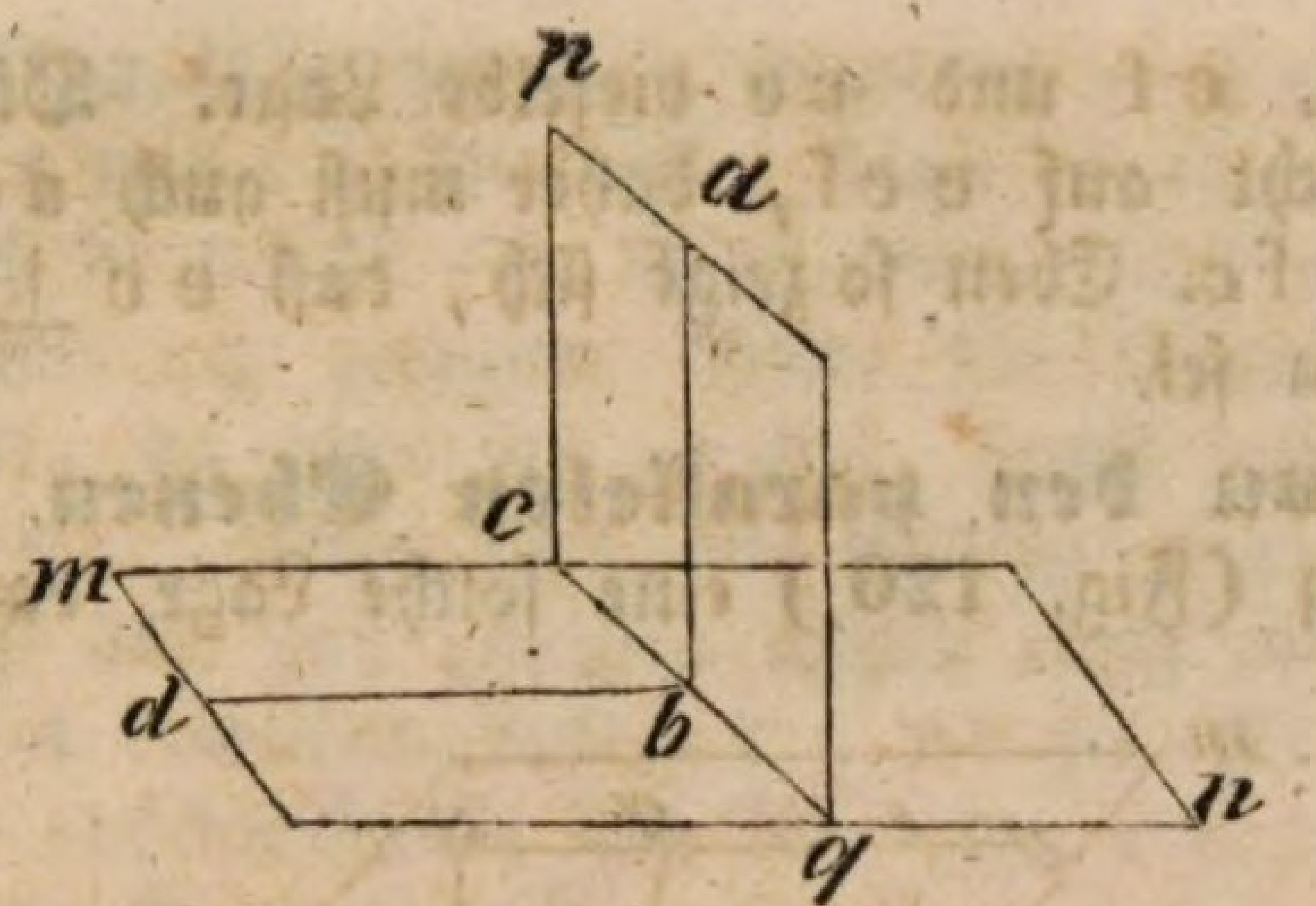
1) Alle Punkte der zu einer Ebene m n parallelen Geraden a b müssen von der Ebene gleiche Abstände haben. Zieht man von c und e auf m n die Senkrechten c d und e f, so ist c d || e f, und wird f mit d verbunden, so muß, da a b || m n ist, d c ⊥ f d und a b, daher f d || e c sein; demnach ist e f = c d. Eine Gerade kann daher mit der ihr parallelen Ebene, so weit auch beide verlängert werden, nie zusammentreffen.

2) Ist eine Gerade a b mit einer in einer Ebene m n gezogenen Geraden h k parallel, so muß sie es auch mit der Ebene sein. Man denke sich von einem beliebigen Punkte c der Geraden a b auf die Ebene m n eine Senkrechte c d gefällt, und durch d in m n, f g || h k gezogen, so muß, da f g || h k und h k || a b ist, auch a b || f g sein; allein es ist c d ⊥ f g, daher ebenfalls c d ⊥ a b. Es ist also c d ⊥ m n und a b, somit a b || m n. Auf ähnliche Art läßt sich auch folgender Satz erweisen:

3) Wird durch eine Gerade a b, die mit einer Ebene m n parallel ist, eine Ebene gelegt, welche die frühere m n in h k schneidet; so muß jene Gerade a b auch mit k h parallel sein.

§. 100. **Senkrechte Lage der Ebenen.** Es sei c q (Fig. 118.) der Durchschnitt der Ebenen m n und p q; errichtet man nun von

Fig. 118.



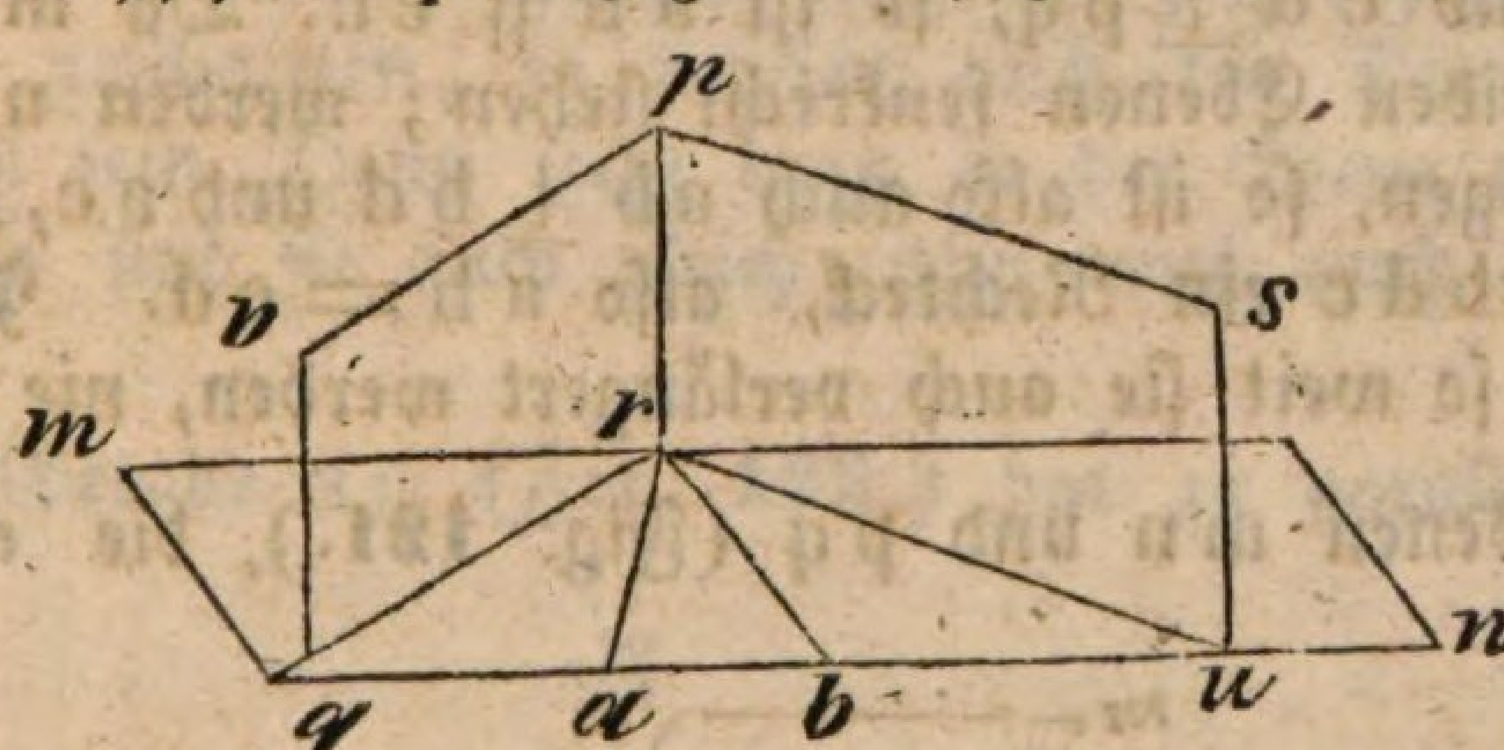
einem beliebigen Punkte b dieser Geraden auf sie, in mn und pq die Senkrechten bd und ba, so heißt der W. abd die Neigung der Ebene pq zur mn; und ist dieser ein rechter, so ist pq ⊥ mn.

1) Steht eine Gerade ab auf einer Ebene mn senkrecht, so muß auch jede durch sie gelegte Ebene pq auf der erstern senkrecht stehen. Die Ebene pq schneide die mn in cq, und in der letztern mn sei bd ⊥ cq, so muß, da ab ⊥ mn ist, der W. abd = R sein; aber es ist auch ab ⊥ cq, folglich W. abd die Neigung von pq zu mn, somit pq ⊥ mn.

2) Sind zwei Ebenen mn und pq aufeinander senkrecht, und man zieht in der einen pq, auf den Durchschnitt cq beider, eine Senkrechte ab, so muß sie auf der andern Ebene mn senkrecht sein. Man ziehe in mn die Gerade bd ⊥ cq, so ist W. abd die Neigung beider Ebenen; somit W. abd = R, oder ab ⊥ bd, und da auch ab ⊥ cq ist, so muß ab ⊥ mn sein.

3) Der Durchschnitt pr (Fig. 119.) zweier, auf einer dritten Ebene

Fig. 119.



mn senkrecht stehenden Ebenen pq und pu ist auf einer dritten mn senkrecht. Man ziehe in mn, ra ⊥ ru, so ist auch ra ⊥ pu, also auch ra ⊥ pr; wird auf gleiche Weise in der Ebene mn die Gerade br ⊥ rq gezogen, so folgt br ⊥ pq, daher auch br ⊥ pr; nun ist pr ⊥ ra und rb, also pr ⊥ mn.

4) Sind drei von einem Punkte c (Fig. 112.) gezogene Gerade ca, ce und cf wechselweise aufeinander senkrecht, so müssen auch die Ebenen der dadurch gebildeten W. ace, acf und ecf dieselbe Lage haben. Da ac und ec auf cf senkrecht stehen, so ist W. ace die Neigung der Ebenen acf und ecf; dieser Winkel ist aber der Voraussetzung zufolge ein rechter, somit ist die Ebene acf ⊥ ecf. Auf dieselbe Art wird auch bewiesen, daß ace ⊥ ecf und ace ⊥ acf sei.

5) Sind drei durch einen Punkt c gelegte Ebenen ace, acf und ecf wechselweise aufeinander senkrecht, so besitzen auch ihre Durch-

schnittslinien ca, cf und ce dieselbe Lage. Die Ebenen ace und acf sind senkrecht auf ecf, daher muß auch ac ⊥ ecf sein, somit ist ac ⊥ ec und fc. Eben so zeigt sich, daß ec ⊥ ac und cf, ferner cf ⊥ ac und ec sei.

§. 101. **Von den parallelen Ebenen.** Haben zwei Ebenen mn und pq (Fig. 120) eine solche Lage, daß die von einem be-

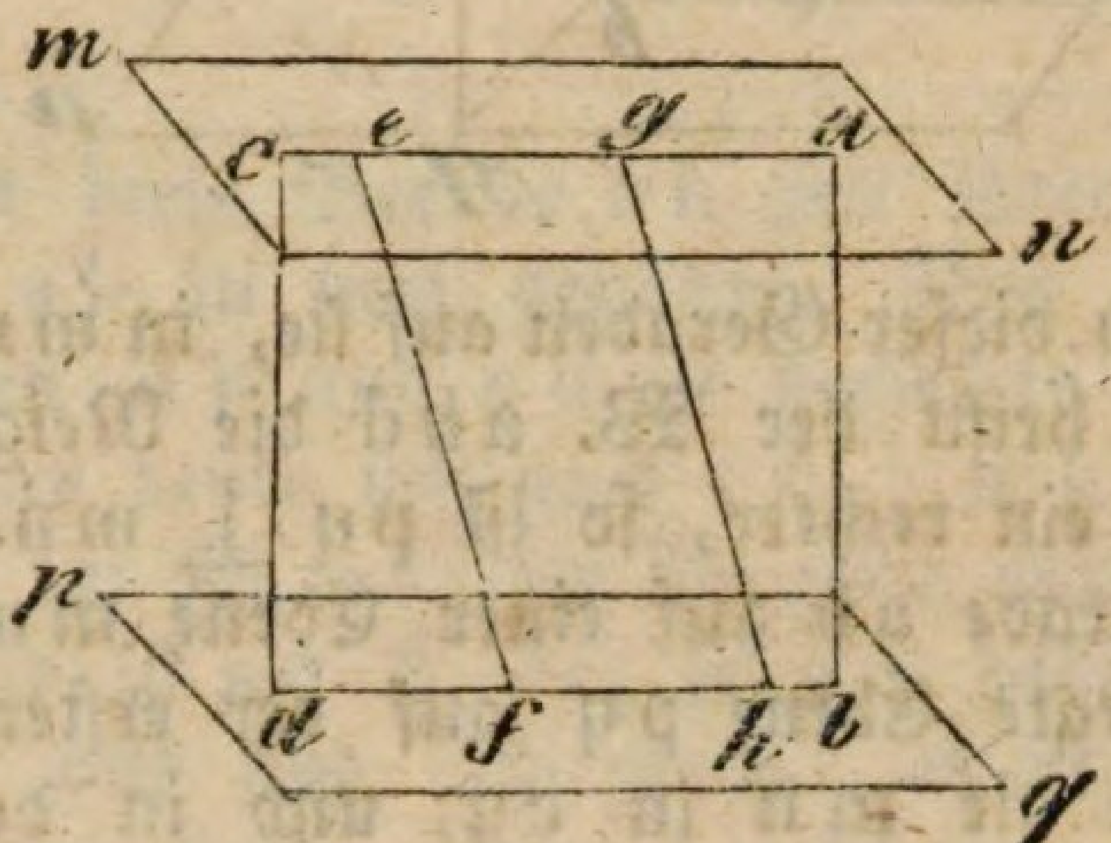


Fig. 120.

liebigen Punkte a der erstern mn, auf letztere pq gezogene Senkrechte ab auch auf der erstern mn senkrecht ist, so heißen sie parallel. Hieraus ergibt sich der Satz:

1) Die Gerade, welche auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht ist, muß hinreichend verlängert auch auf der andern senkrecht sein.

2) Parallele Ebenen mn und pq haben gleiche Abstände von einander. Von den in mn beliebig angenommenen Punkten a und c fälle man ab und cd ⊥ pq, so ist ab || cd. Da mn || pq ist, so muß ab auf beiden Ebenen senkrecht stehen; werden nun die Geraden ac und bd gezogen, so ist also auch ab ⊥ bd und ac, daher ac || bd, es ist demnach abdc ein Rechteck, also ab = cd. Parallele Ebenen können sich also, so weit sie auch verlängert werden, nie schneiden.

3) Zwei Ebenen mn und pq (Fig. 121.), die einer dritten rs

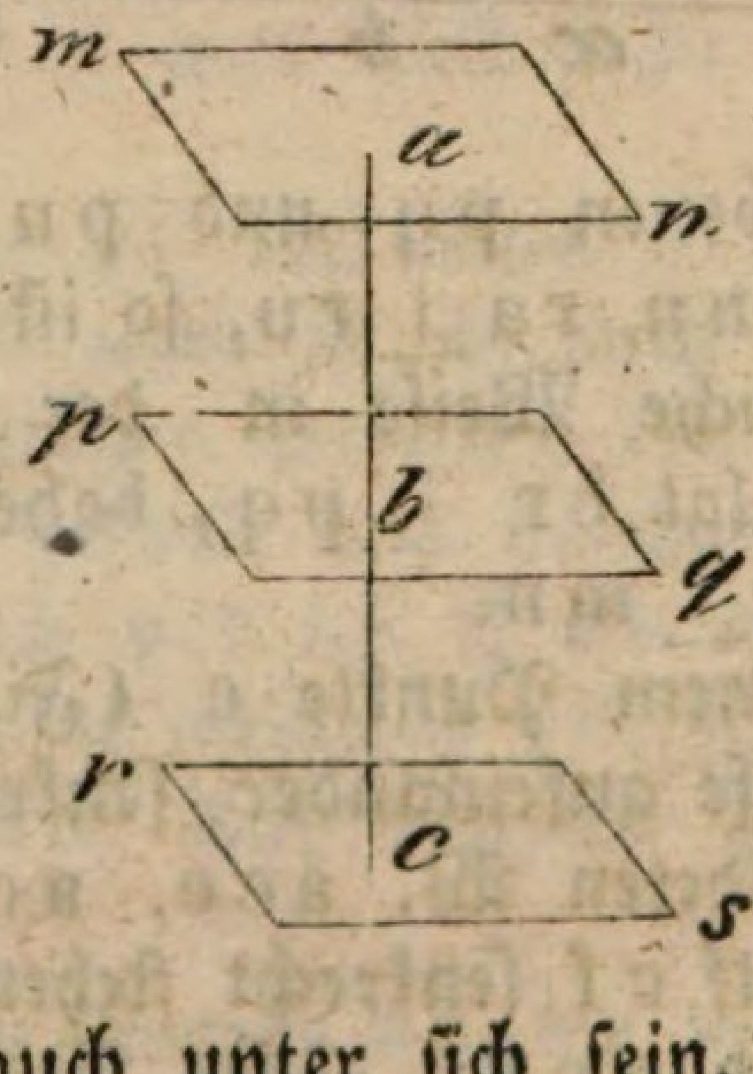


Fig. 121.

parallel sind, müssen es auch unter sich sein. Es sei ac ⊥ mn und rs, so muß, da rs || pq ist, auch ac ⊥ pq sein; die Gerade ac steht also senkrecht auf mn und pq, somit ist mn || pq.

4) Drei nicht in einer Geraden liegende Punkte v, p, s (Fig. 119.), die von einer Ebene mn gleiche Abstände haben, befinden sich in einer mit mn

parallelen Ebene. Man fälle von den Punkten v, p und s auf m n die Senkrechten v q, p r und s u, so müssen diese wegen der Voraussetzung gleich sein; demnach ist p r ‡ s u. Wird nun r mit u verbunden, und in der durch p r und s u gelegten Ebene die Gerade p s gezogen, so muß p s $\parallel$ r u sein; da aber p r $\perp$ m n, somit auch p r $\perp$ r u ist, so ist also auch p r $\perp$ p s. Zieht man die Gerade r q und in der durch die Parallelen v q und p r gelegten Ebene auch die Gerade p v; so wird auf dieselbe Art bewiesen, daß p r $\perp$ p v sei. Es ist also p r $\perp$ p s und p v, somit auch auf der Ebene des W. v p s, und da auch p r $\perp$ m n ist, so muß daher die Ebene des W. v p s $\parallel$ m n sein.

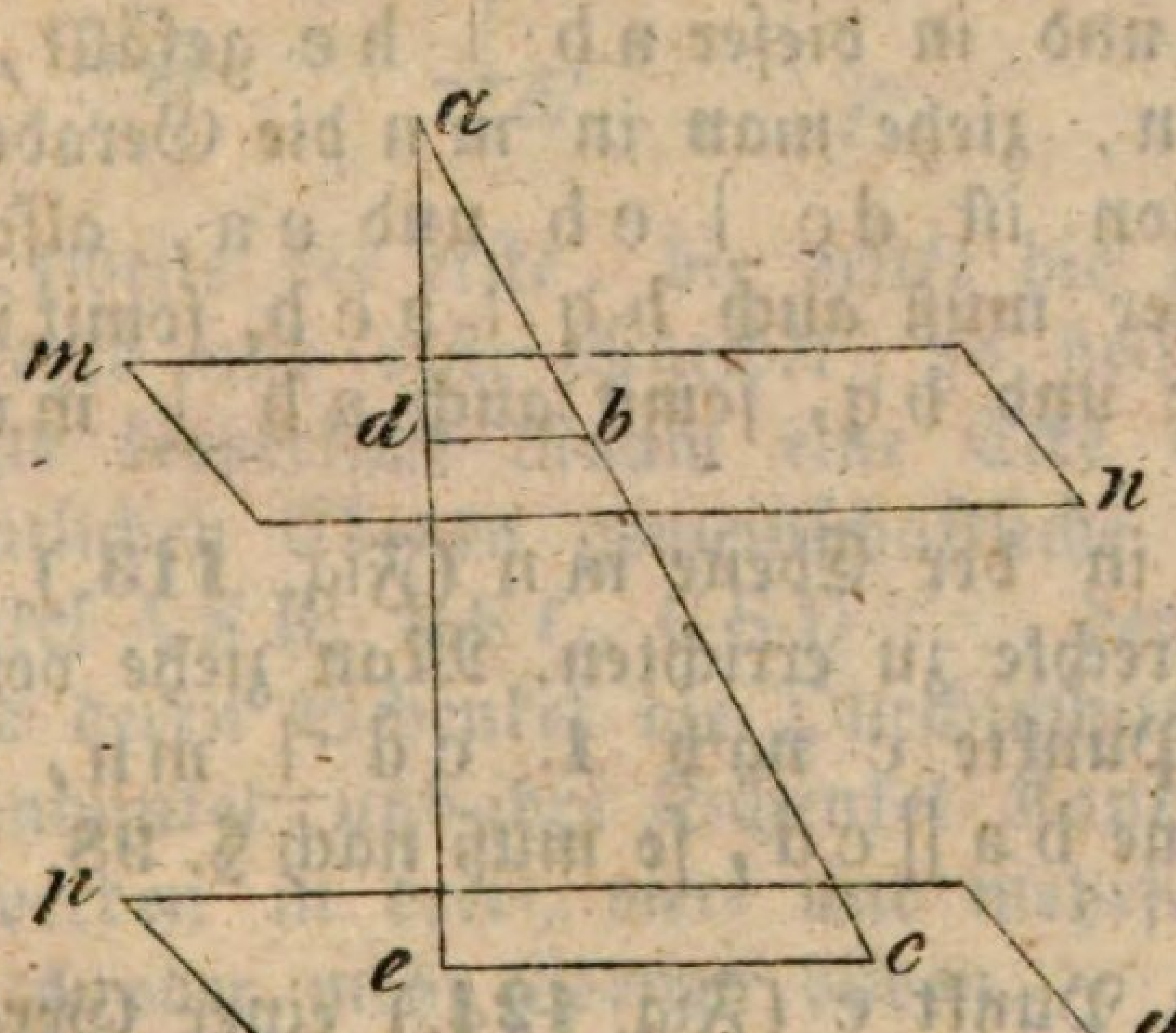
5) Sind die Schenkel a b und d e, e b und f e (Fig. **115.**) der in verschiedenen Ebenen liegenden W. a b c und d e f parallel, so müssen es auch die Ebenen dieser Winkel sein. Da a b $\parallel$ d e ist, so muß auch a b $\parallel$ d e f sein, folglich haben die Punkte a und b von der Ebene d e f gleiche Abstände. Da ferner b c $\parallel$ e f, somit auch b c $\parallel$ d e f ist, müssen ebenfalls die Punkte b und c von der Ebene d e f gleiche Abstände besitzen; also haben a, b, und c von der Ebene d e f gleiche Entfernungen, folglich liegen sie in einer mit d e f parallelen Ebene.

§. **102. Fortsetzung.** 1) Parallele Linien a b und c d (Fig. **116.**) zwischen parallelen Ebenen p q und m n sind gleich. Man denke sich a e und c f $\perp$ m n errichtet, so ist a e = c f; werden nun die Geraden b e und f d gezogen, so ist W. a b e = c d f, denn diese Winkel sind die Neigungen der Parallelen a b und c d zur Ebene m n. Es ist aber auch W. a e b = c f d = R, daher muß das △ a b e ≅ c d f, somit a b = c d sein.

2) Werden parallele Ebenen m n und p q (Fig. **120.**) von einer dritten a c d b geschnitten, so müssen auch die Durchschnittslinien a c und b d parallel sein. Denn zieht man in der Ebene a d die Parallelen e f und g h, so sind sie auch gleich; also muß auch e g $\parallel$ f h, daher a c $\parallel$ b d sein.

3) Jede Gerade a c (Fig. **122.**) hat zu parallelen Ebenen m n

Fig. **122.**

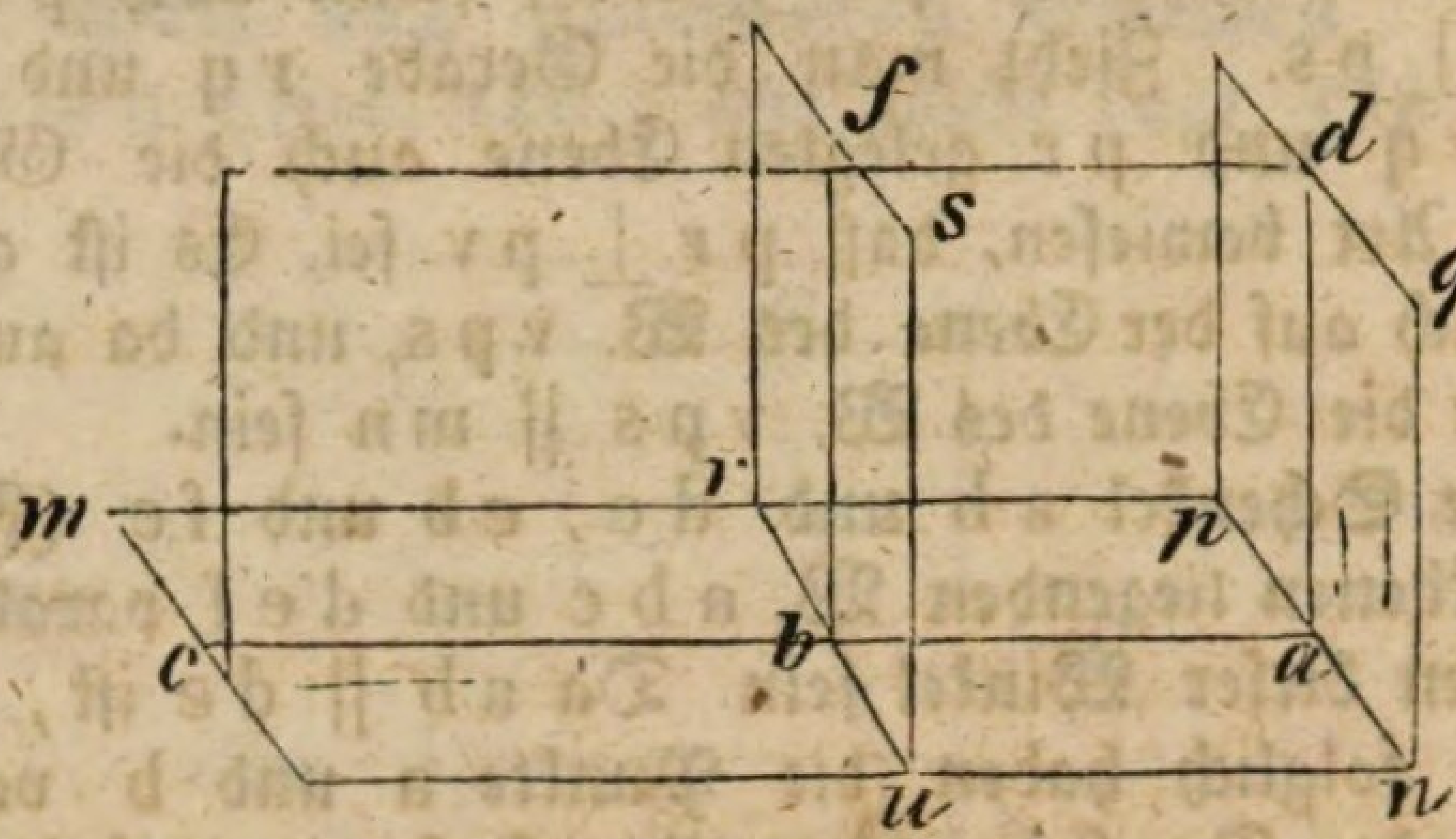


und p q gleiche Neigung. Es sei von a auf die Ebenen m n und p q die Gerade a d e senkrecht gezogen, und durch den W. c a e eine Ebene gelegt, welche die m n und p q in b d und e c schneidet, so muß b d $\parallel$ e c sein. Es ist also △ a b d ∼ a c e, daher W. a b d = a c e.

Diese Winkel sind aber die genannten Neigungen, also ist obiger Satz erwiesen.

4) Parallele Ebenen p q und r s (Fig. **123.**) haben zu einer dritten m n gleiche Neigung.

Fig. **123.**



Die parallelen Ebenen p q und r s werden von m n in den Parallelen p n und r u geschnitten, a b c sei senkrecht auf beide, und wird noch in der Ebene p q, a d $\perp$ p n gefällt, so ist der W. d a c die Neigung von p q zu m n. Wird nun durch den W. d a c eine Ebene gelegt, so schneidet sie die r s in einer mit a d parallelen f b, es ist daher W. f b c = d a c. Vermöge der Konstruktion ist n p $\perp$ a b und a d, somit n p senkrecht auf der Ebene a b f d; da aber r u || n p ist, so muß r u $\perp$ a b f d, also auch r u $\perp$ b f sein. Demnach sind b c und b f $\perp$ r u, daher W. f b c die Neigung von r s zu m n; aber es ist W. f b c = d a c, daher haben die Ebenen p q und r s zu m n gleiche Neigung.

§. 103. Auflösung einiger Probleme.

1) Es sei von einem außerhalb einer Ebene m n (Fig. **110.**) gegebenen Punkte a auf diese eine Senkrechte zu errichten. Man ziehe in m n ein beliebige Gerade d c, dann in der durch d c und a gelegten Ebene a e $\perp$ d c, ferner in m n, h e $\perp$ d c; wird nun durch den W. a e h eine Ebene gelegt, und in dieser a b $\perp$ h e gefällt, so ist a b $\perp$ m n. Um dieß zu beweisen, ziehe man in m n die Gerade b q || d c. Vermöge der Konstruktion ist d c $\perp$ e b und e a, also d c senkrecht auf der Ebene a e b; daher muß auch b q $\perp$ a e b, somit W. a b q = R sein. Es ist also a b $\perp$ h e und b q, somit auch a b $\perp$ m n.

2) Von einem in der Ebene m n (Fig. **113.**) gelegenen Punkte b auf sie eine Senkrechte zu errichten. Man ziehe von dem, außerhalb m n angenommenen Punkte c nach **1.** c d $\perp$ m n, dann in der durch c d und b gelegten Ebene b a || c d, so muß nach §. **98.** **1.** a b $\perp$ m n sein.

3) Durch einen Punkt c (Fig. **124.**) einer Geraden a b auf sie eine senkrechte Ebene zu ziehen. Man lege durch a b eine Ebene a m und errichte in derselben c d $\perp$ a b; wird durch a b noch eine zweite Ebene a n gelegt, und in dieser e c $\perp$ a b gezogen, so ist die durch den W. e c d gelegte Ebene die verlangte, weil a b $\perp$ e c und c d ist.

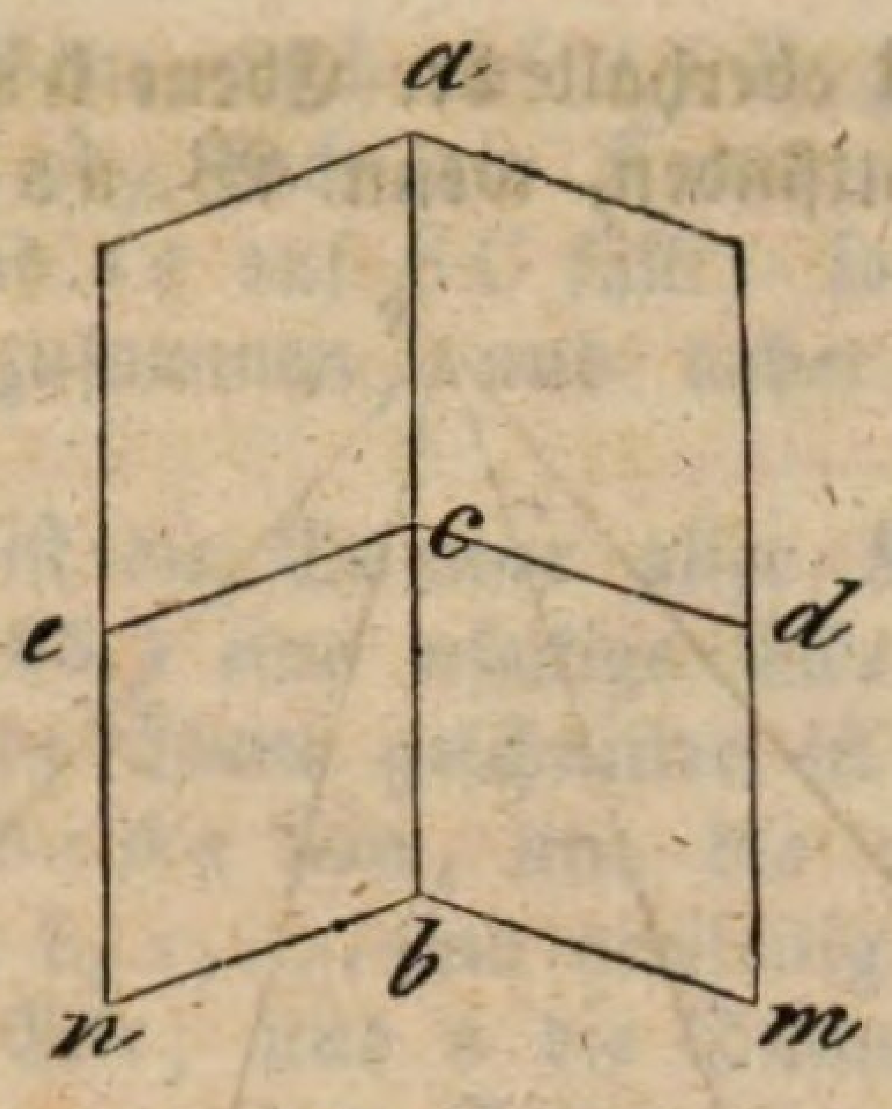


Fig. 124.

4) Durch einen Punkt a (Fig. 121.) zu einer Ebene p q eine parallele Ebene zu führen. Man ziehe nach 1. a b ⊥ p q und hierauf durch a (nach 3.) m n ⊥ a b; so steht a b ⊥ p q und m n, daher ist m n ∥ p q.

§. 101. **Von den Körperwinkeln.** Werden durch einen Punkt S (Fig. 125.) drei oder mehrere Ebenen A S B B S C, C S D, ...

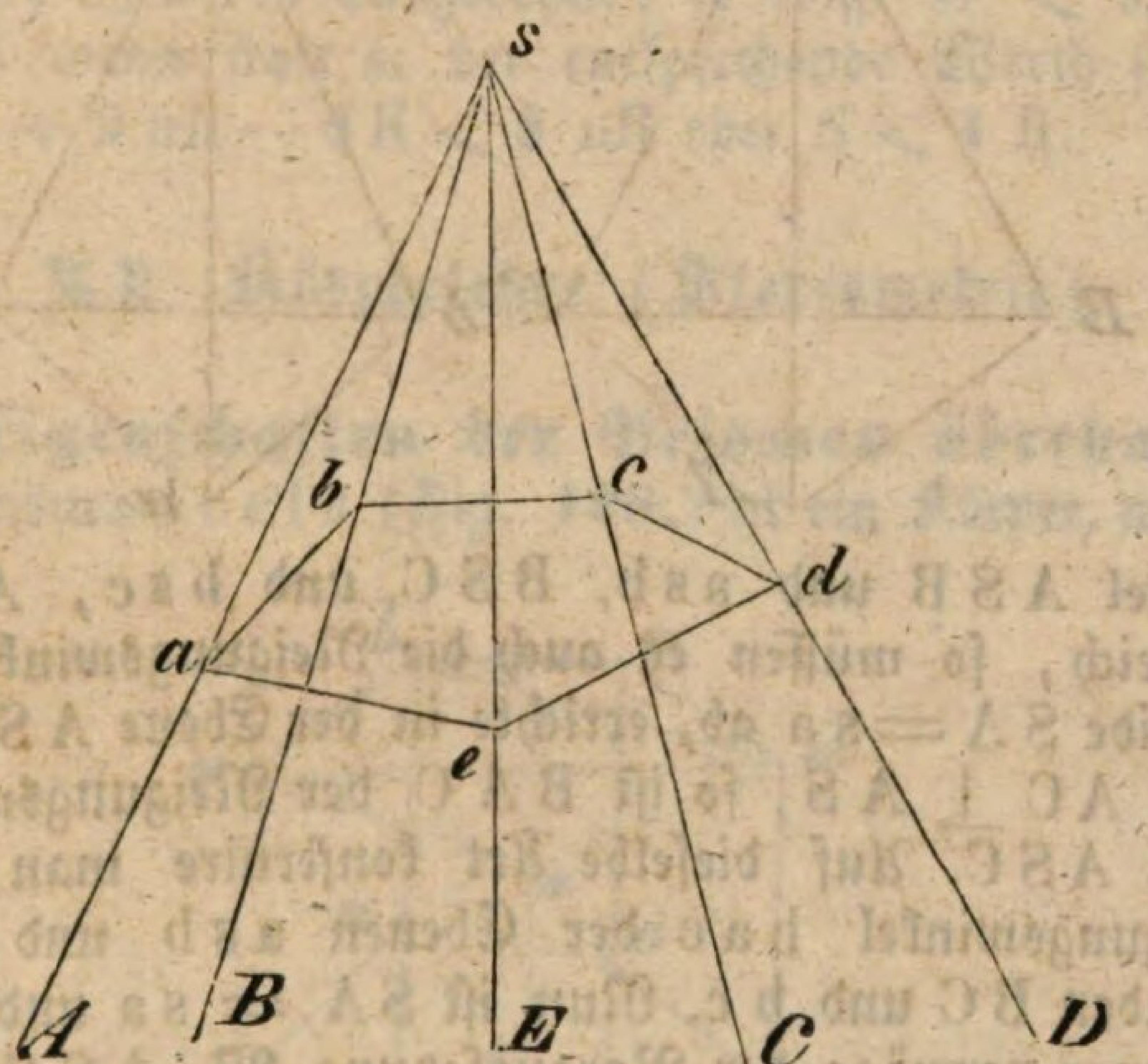


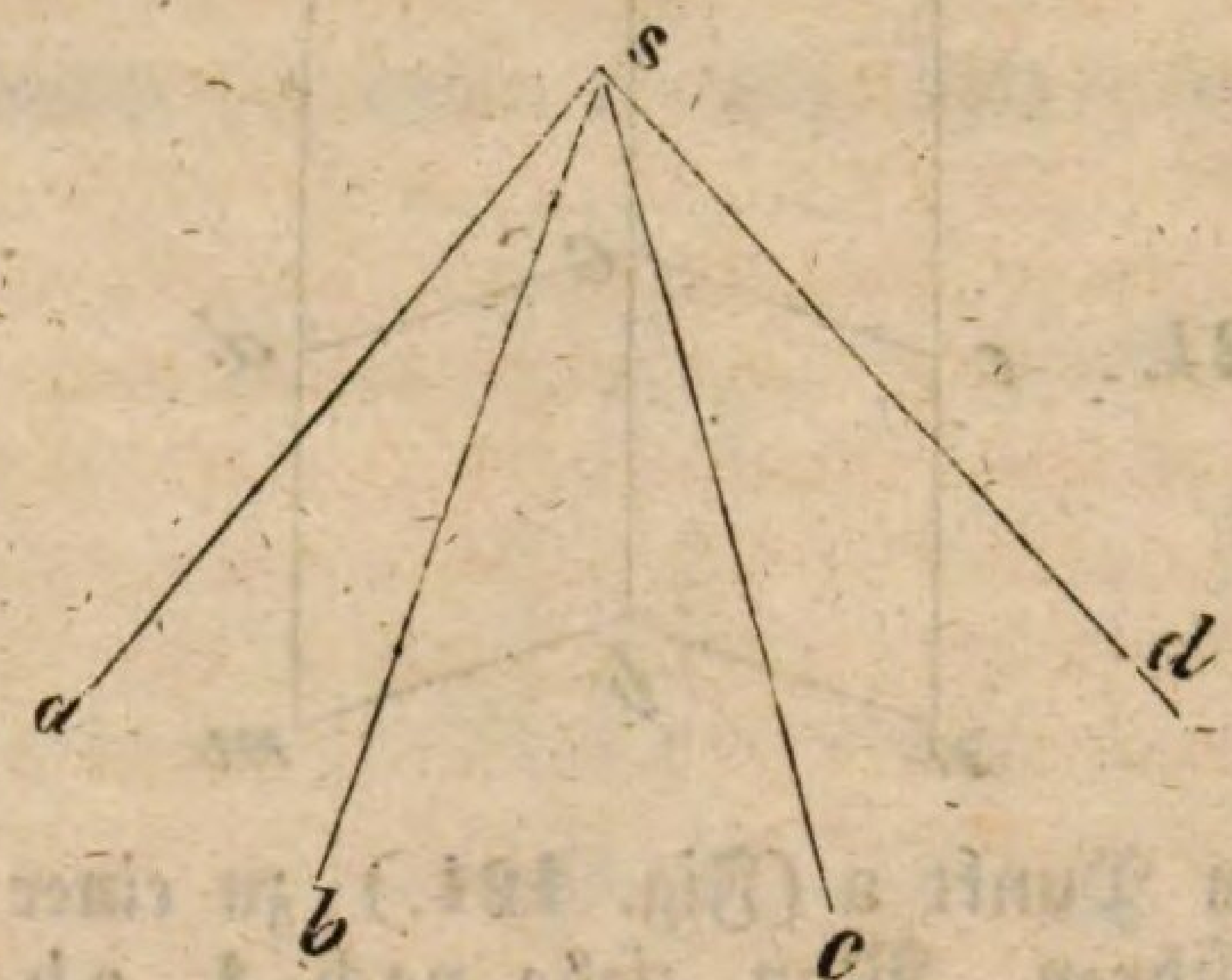
Fig. 125.

so gelegt, daß die zweite die erste, die dritte die zweite u. s. w., die letzte aber die vorletzte und erste schneidet; so heißt der auf diese Art erhaltene unbegrenzte körperliche Raum eine Ecke oder ein Körperwinkel, und jener sämmtlichen Ebenen gemeinschaftliche Punkt S die Spitze desselben. Die Winkel A S B, B S C, C S D, ... deren gemeinschaftlicher Scheitel S ist, und deren Schenkel die Durchschnitte je zweier Ebenen sind, werden Kantenwinkel und ihre Schenkel Kanten der Ecke genannt. Die Körperwinkel werden in drei-, vier- und mehrseitige eingetheilt, je nachdem dieselben 3, 4 oder mehr Ebenen bilden.

1) In jeder dreiseitigen Ecke ist die Summe zweier Kantenwinkel größer als der dritte. Es seien die in einer Ebene liegenden Winkel a s b, b s c und c s d (Fig. 126.) die Kantenwinkel einer zu bildenden dreiseitigen Ecke; damit nun eine solche entstehe, müssen die Ebenen a s b und c s d um die Geraden s b und s c so gegeneinander gedreht

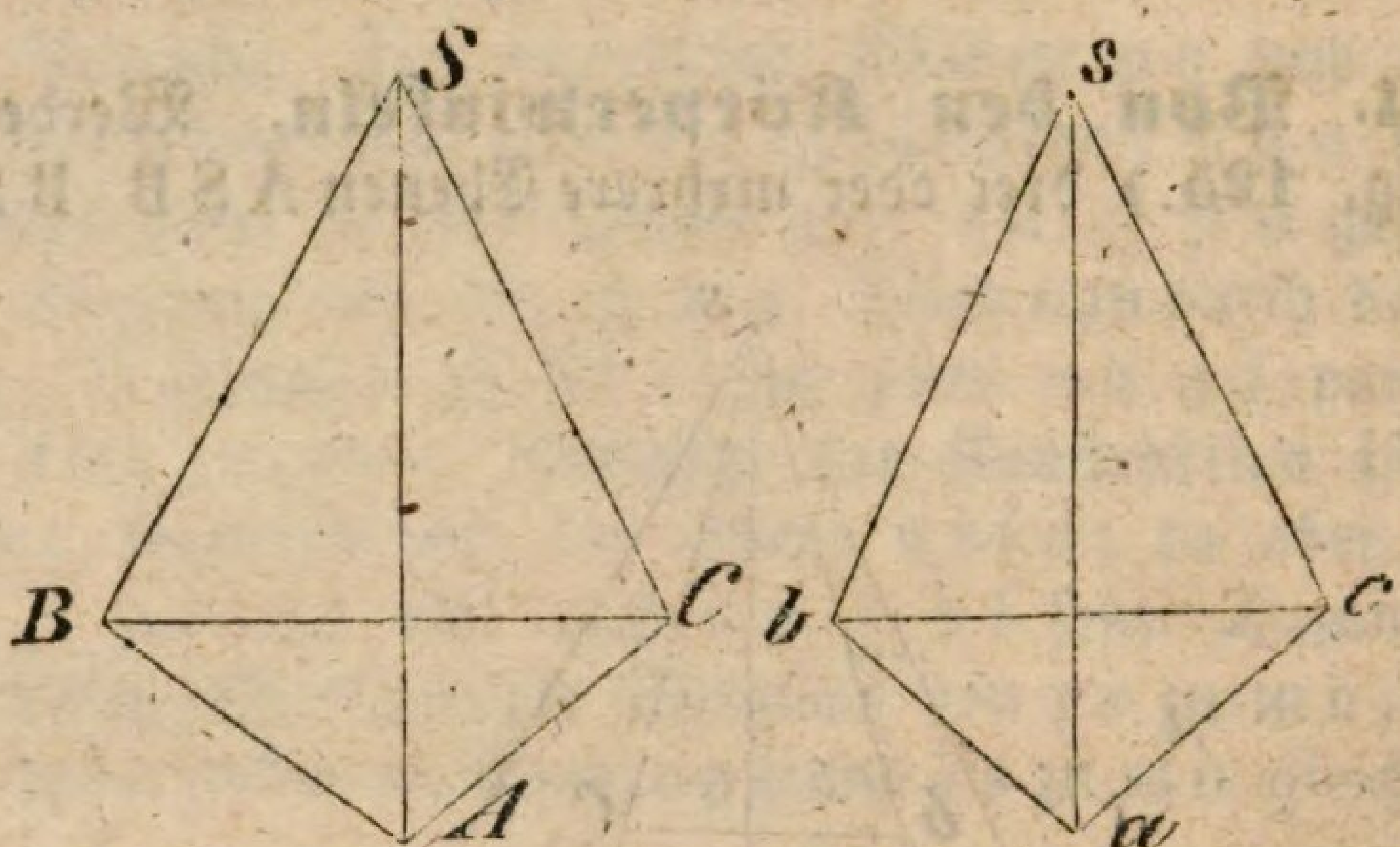
werden, daß s a und s d oberhalb der Ebene b s c zusammenfallen; dieß kann aber nur dann stattfinden, wenn W. a s b + c s d > b s c ist.

Fig. 126.



2) Sind in zwei dreiseitigen Ecken S A B C und s a b c (Fig. 127.)

Fig. 127.



die Kantenwinkel A S B und a s b, B S C und b s c, A S C und a s c wechselweise gleich, so müssen es auch die Neigungswinkel ihrer Ebenen sein. Man schneide S A = s a ab, errichte in der Ebene A S B, A B ⊥ A S und in A S C, A C ⊥ A S, so ist B A C der Neigungswinkel der Ebenen A S B und A S C. Auf dieselbe Art konstruire man in der andern Ecke den Neigungswinkel b a c der Ebenen a s b und a s c und ziehe dann die Geraden B C und b c. Nun ist S A = s a und W. S A C = s a c = R; ferner vermöge der Voraussetzung W. A S C = a s c, also das △ A S C ≅ a s c, somit S C = s c und A C = a c. Eben so wird auch bewiesen, daß S B = s b und A B = a b sei. Werden hierauf die Dreiecke S B C und s b c verglichen, so folgt S B = s b, S C = s c, und wegen der Voraussetzung W. B S C = b s c. Daher ist das △ B S C ≅ b s c, demnach B C = b c; da nun auch A B = a b und A C = a c ist, so muß das △ A B C ≅ a b c, also W. B A C = b a c sein. Eben so wird auch die Gleichheit der Neigungswinkel der übrigen korrespondirenden Seitenebenen bewiesen.

3) Sind zwei dreiseitige Ecken S A B C und s a b c (Fig. 127.) aus wechselweise gleichen Kantenwinkeln A S B und a s b, B S C und b s c, A S C und a s c auf dieselbe Art gebildet; so sind sie kongruent. Unserer Voraussetzung gemäß sind in den beiden Ecken die Neigungswinkel je zweier korrespondirender Seitenebenen nach 2. einander gleich; denkt man sich nun die Ecke s so über S gelegt, daß der W. b s c den W. B S C decke, so muß, da die Ebene a s b zu c s b dieselbe Neigung hat, wie

ASB zu CSB, die Ebene asb auf ASB zu liegen kommen; und weil W. asb = ASB ist, auch die Kante sa auf SA fallen. Da endlich sa auf SA und sc auf SC fällt, so fallen auch die Ebenen der W. ASC und asc zusammen, und daher sind jene beiden Ecken kongruent.

4) In jeder Ecke ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als 4 R. Es stelle S (Fig. 125.) eine nseitige Ecke vor, welche durch eine sämmtliche Kanten treffende Ebene geschnitten ist; so muß dieser Schnitt ein nseitiges Polygon abcde sein, und die an den Seiten desselben liegenden Körperwinkel a, b, c, ... sind dreiseitig; ist nun S die Summe der Kantenwinkel jener Ecke, und s die Summe der, in den n Dreiecken Sab, Sbc, Scd, ... den Seiten jenes Polygons anliegenden Winkel, so ist S + s die Summe aller Winkel jener Dreiecke, daher $S + s = 2$ nR. Wird endlich die Summe der Polygonwinkel durch s_1 bezeichnet, so folgt $s_1 = 2$ nR — 4 R. In der Ecke a ist der Polygonwinkel bae nach 1. kleiner als die Summe der beiden andern Sab + Sae, und wird diese Bemerkung auch auf alle übrigen dreiseitigen Ecken b, c, d ... ausgedehnt; so folgt $s_1 < s$, also $S + s_1 < 2$ nR, und wenn statt s_1 der entsprechende Werth substituirt wird, so ergibt sich $S + 2$ nR — 4 R < 2 nR oder $S < 4$ R.

XI. Körperlehre (Stereometrie).

§. 105. Eigenschaften der Prismen überhaupt.

1) Ein Prisma acelh (Fig. 128.) ist ein Körper, welcher von zwei

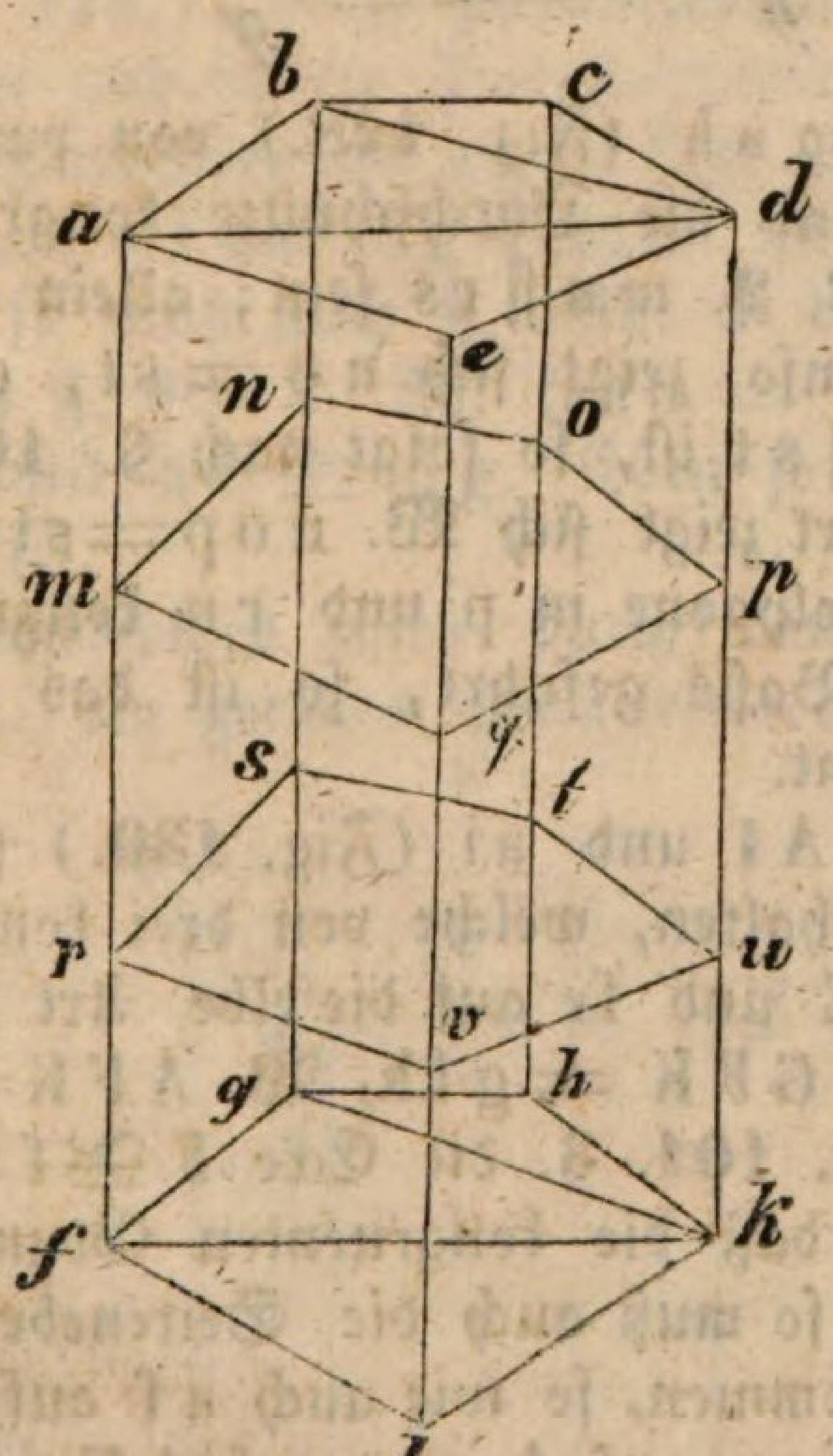


Fig. 128.

parallelen und kongruenten Polygonen aec und flh und von so vielen Parallelogrammen ag, bh, ck, ... als eines jener Polygone Seiten hat, begrenzt ist. Die beiden Polygone heißen Grundebenen, jene Parallelo-

gramme hingegen Seitenebenen des Prisma, und der Durchschnitt a f zweier Seitenebenen a g und a l wird Kante desselben genannt. In jedem Prisma sind also sämmtliche Kanten gleich und parallel.

2) Nach der Seitenzahl der Grundebenen theilt man die Prismen in drei-, vier- oder nseitige ein; so z. B. ist a k (Fig. 128.) ein fünfseitiges Prisma. Stehen die Kanten auf den Grundebenen senkrecht, so heißt das Prisma ein gerades oder senkrechtes, wie a k (Fig. 128.); haben aber die Kanten eine schiefe Lage, so wird es ein schiefes genannt; ein solches ist a g (Fig. 129). Im geraden Prisma bilden die Kanten mit den Seiten der Grundebenen rechte Winkel, daher müssen die Seitenebenen stets Rechtecke sein.

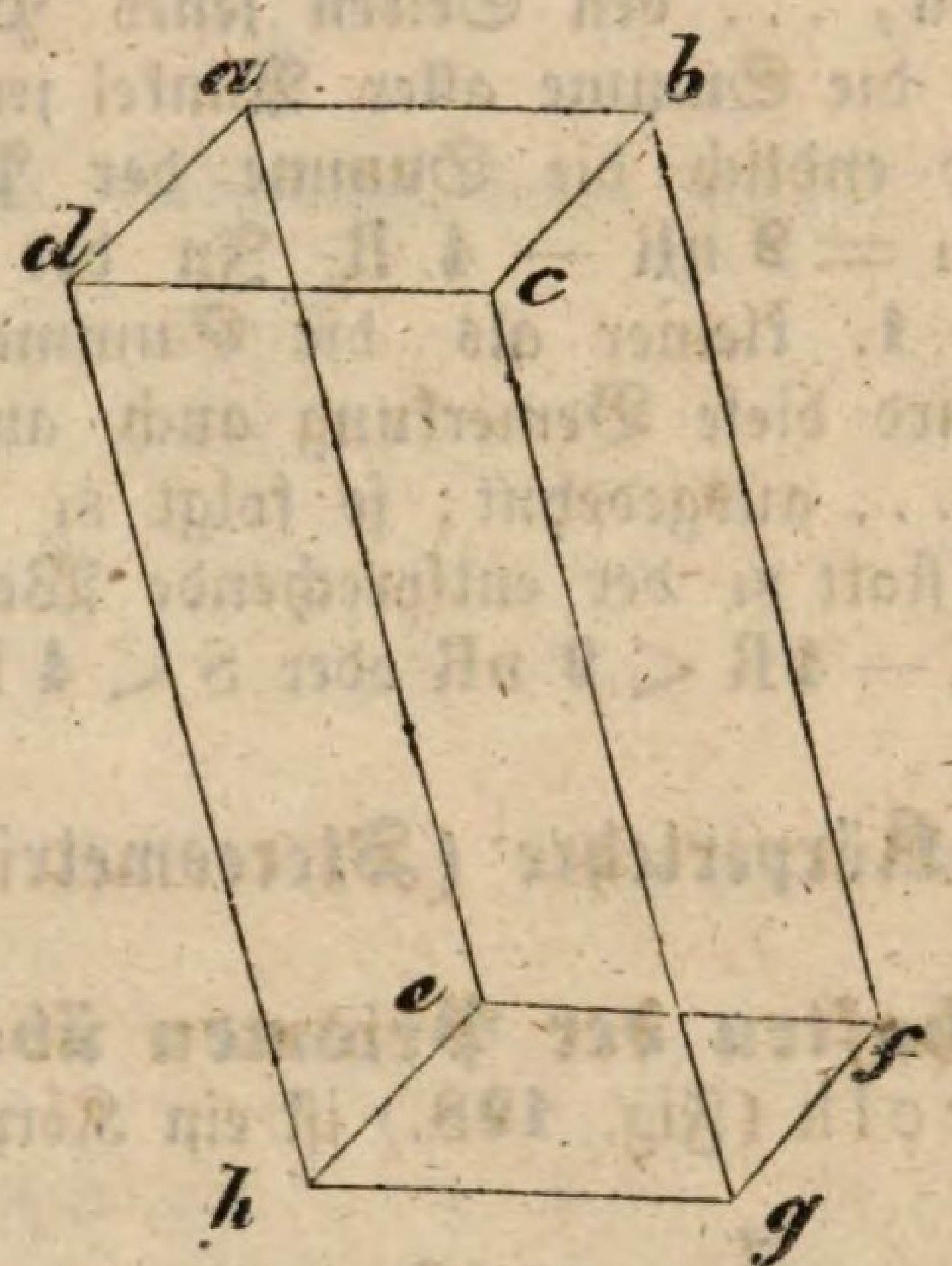


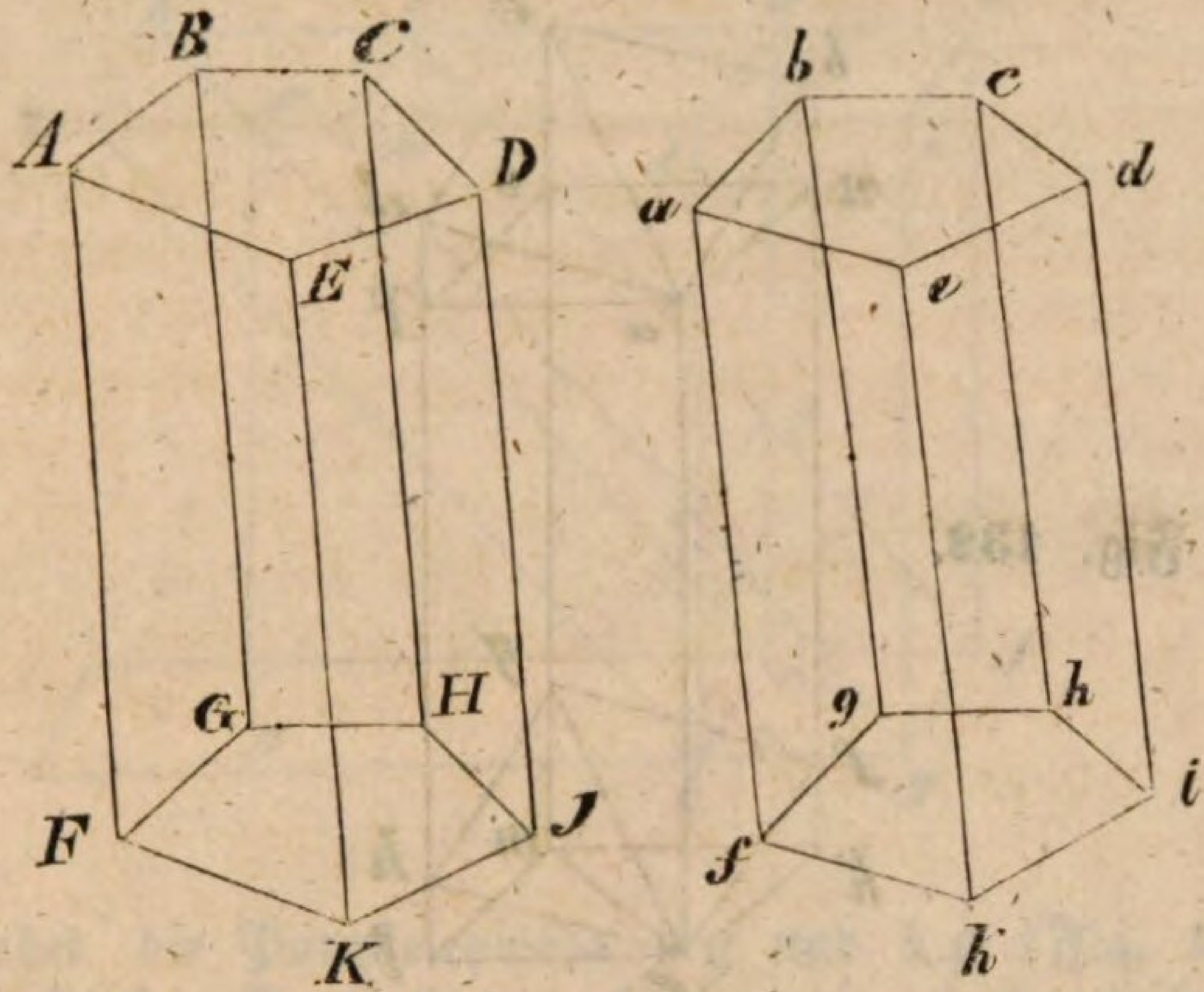
Fig. 129.

3) Wird ein Prisma a k (Fig. 128.) von parallelen Ebenen m p und r u geschnitten, so sind die Durchschnitte kongruent. Da m p || r u ist, so muß nach §. 102. 2. m n || r s sein; allein es ist auch m r || n s, somit m n = r s und ebenso zeigt sich n o = s t, o p = t u u. s. w. Weil m n || r s und n o || s t ist, so folgt nach §. 101. 5. W. m n o = r s t, und auf ähnliche Art zeigt sich W. n o p = s t u, W. o p q = t u v u. s. w. Also sind die Polygone m p und r u kongruent. Wird aber der Schnitt parallel mit der Basis geführt, so ist das entstandene Polygon der Grundebene kongruent.

4) Zwei Prismen A I und a i (Fig. 130.) sind kongruent, wenn sie eine Ecke F und f enthalten, welche von drei kongruenten Ebenen F I und f i, F B und f b, F E und f e auf dieselbe Art gebildet ist. Aus der Voraussetzung folgt W. G F K = g f k, W. A F K = a f k, W. A F G = a f g, somit ist nach §. 101. 3. die Ecke F ≅ f; denkt man sich nun a i so über A I gestellt, daß die kongruenten Grundebenen f i und F I genau zusammenfallen, so muß auch die Seitenebene f e auf F e und f b auf F B zu liegen kommen, so wie auch a f auf A F fallen; aber es ist f e ≅ F E, daher fällt a auf A, a e auf A E und e k auf E K; ferner wegen b f ≅ B F fällt a b auf A B und b g auf B G. Die Seitenebenen b h und B H, da sie mit den Seiten b g und B G, g h und G H zusammenfallen, sind also kongruent, daher erhält b c die Lage B C

und ch die Lage CH. Schließt man auf diese Art fort, so zeigt sich, daß beide Prismen mit ihren Grenzen sich wechselseitig decken, also kongruent seien.

Fig. 130.



5) Wendet man den Begriff der Aehnlichkeit auf Prismen an, so folgt, daß sie ähnlich sind, wenn die Ecken des einen jenen des andern in derselben Ordnung kongruent sind, und beide Körper von wechselweise ähnlichen Grenzebenen auf dieselbe Art eingeschlossen werden.

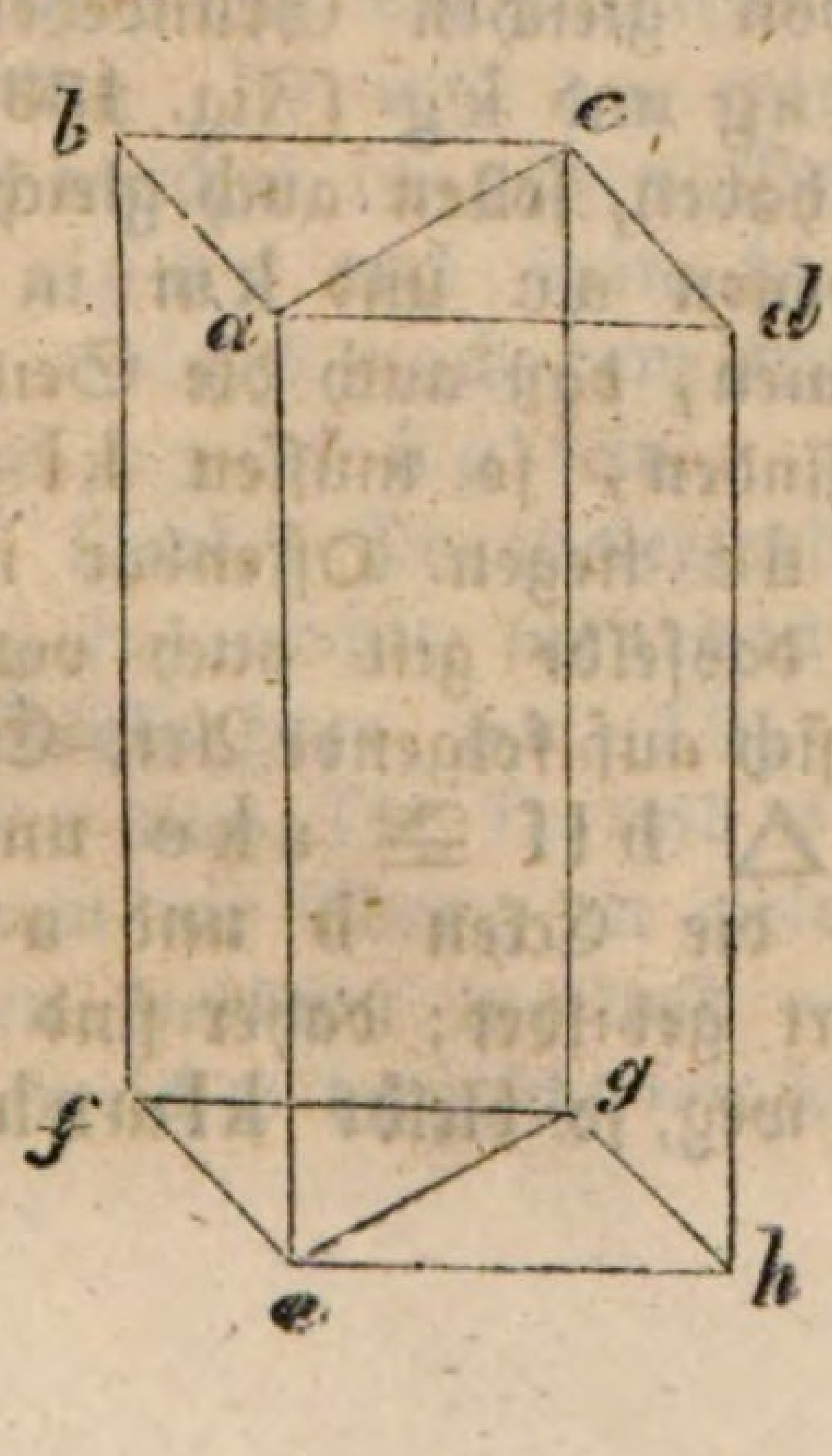
§. 106. **Eigenschaften der Parallelepipeda.**

1) Ein vierseitiges Prisma, dessen Grundebenen Parallelogramme sind, wie ag (Fig. 129.), heißt Parallelepiped. Man unterscheidet wie beim Prisma, gerade und schiefe Parallelepipeda.

2) In jedem Parallelepiped ag (Fig. 129.) sind die gegenüberliegenden Seitenebenen af und dg parallel und kongruent. Da ab || dc und ae || dh ist, so muß nach §. 101. 5. die Ebene af || dg sein; es ist aber auch nach §. 98. 4. W. bae = cdh, ferner ab = dc und ae = dh, somit af ≅ dg. Eben so wird auch bewiesen, daß ah || und ≅ bg sei.

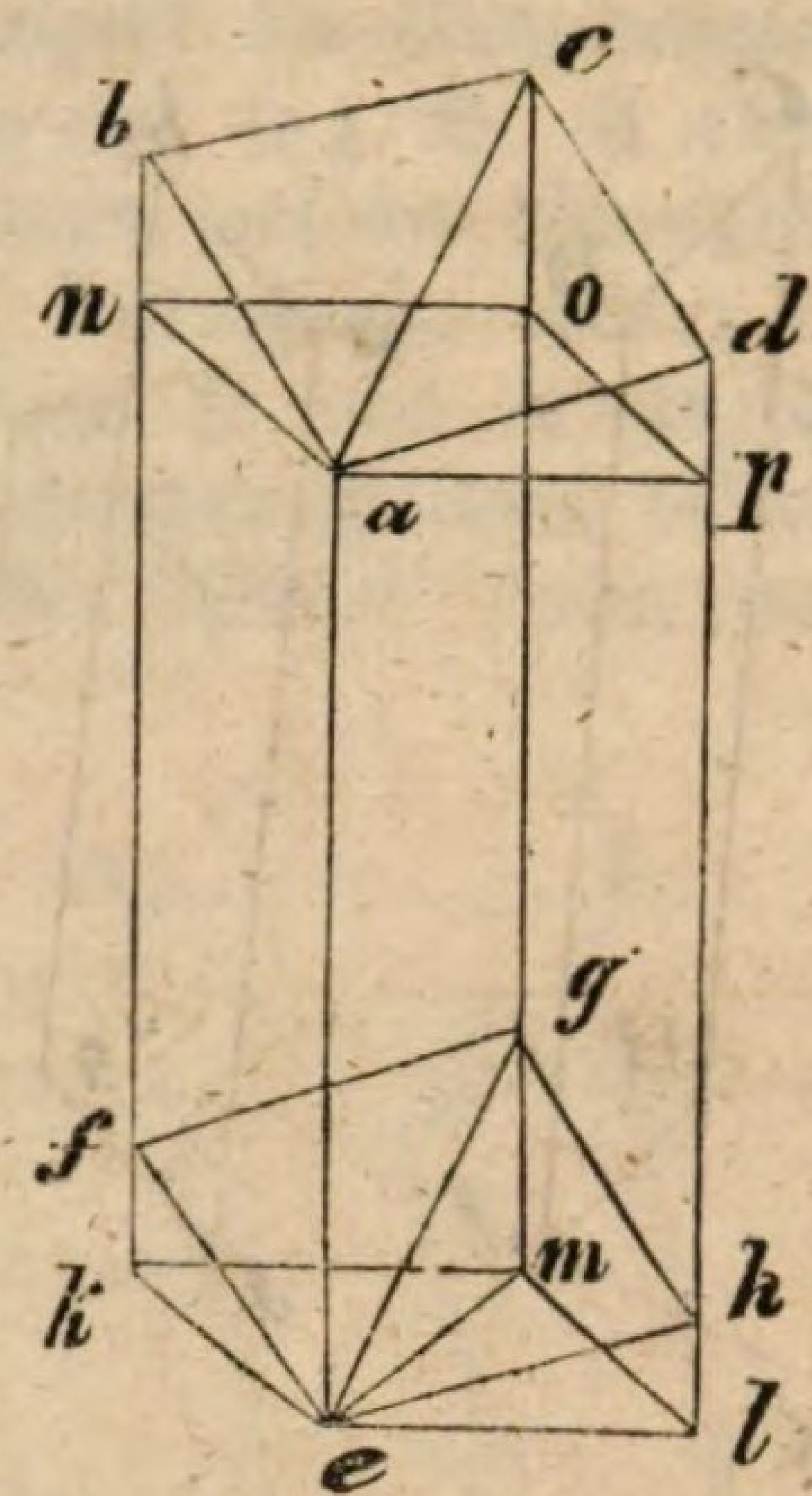
3) Jedes Parallelepiped wird durch den Diagonalschnitt halbirt. Es sei bh (Fig. 131.) ein gerades Parallelepiped und ag der Diagonal-

Fig. 131.



schnitt; so ist $\triangle efg \cong \triangle egh$, aber auch $fa \cong hc$ und $fc \cong ha$, daher nach §. 105. 4. $abcgfe \cong adcghe$. Ist aber bh (Fig. 132.) ein schie-

Fig. 132.



fes Parallelepiped, so ziehe man durch a und e auf ae zwei senkrechte Ebenen, deren erstere den Durchschnitt anop, letztere hingegen mit den verlängerten Seitenebenen den Durchschnitt ekml gibt. Nun ist nach §. 102. 2. $na \parallel ek$, folglich $na = ke$; eben so zeigt sich auch $no = km$, da aber ferner W. $ano = ekm$ ist, so ist $np \cong kl$; daher nl ein Parallelepiped und zwar ein gerades, somit $ekmona \cong elmoap$. Da $bf = ae = nk$ ist, so muß auch $bn = fk$ sein, und auf gleiche Art zeigt sich $oc = mg$. Denkt man sich nun ekmgf so auf anocb gestellt, daß die kongruenten Dreiecke ekm und ano zusammenfallen; so muß auch kf auf nb und wegen $kf = nb$ der Punkt f auf b zu liegen kommen; auch folgt, daß g auf c fällt, somit ist $ekmgf \cong anocb$, und daher $ekmona = efgcba$. Eben so beweist man, daß $elmoap = ehgcad$ sei, folglich muß auch $efgcba = ehgcad$ sein, d. h. der Diagonalschnitt aegc halbirt das schiefe Parallelepiped bh.

4) Parallelepipeda von gleichen Grundebenen und Höhen sind gleich. Die Parallelepipeda ag und kg (Fig. 133.), welche die gemeinschaftliche Grundebene eg haben, sollen auch gleiche Höhen besitzen, dann liegen die obern Grundebenen ac und km in derselben Ebene, und wird noch ferner angenommen, daß auch die Seitenebenen dg und ng sich in derselben Ebene befinden, so müssen kl und mn in den Verlängerungen von ab und dc liegen. Offenbar ist nun aekndh ein dreiseitiges Prisma, und dasselbe gilt auch von blfgmc, und die Kongruenz derselben ergibt sich auf folgende Art. Es ist $bg \cong ah$, ferner, wie man leicht einsieht, $\triangle blf \cong ake$ und $blmc \cong aknd$. Jene Prismen haben also die Ecken b und a von drei kongruenten Grenzebenen auf dieselbe Art gebildet; daher sind sie kongruent. Nimmt man von beiden alpomd weg, so bleibt $klmnhepo = abcdopfg$,

und wird beiderseits h e f g o p hinzugesetzt, so ergibt sich endlich k g = a g.

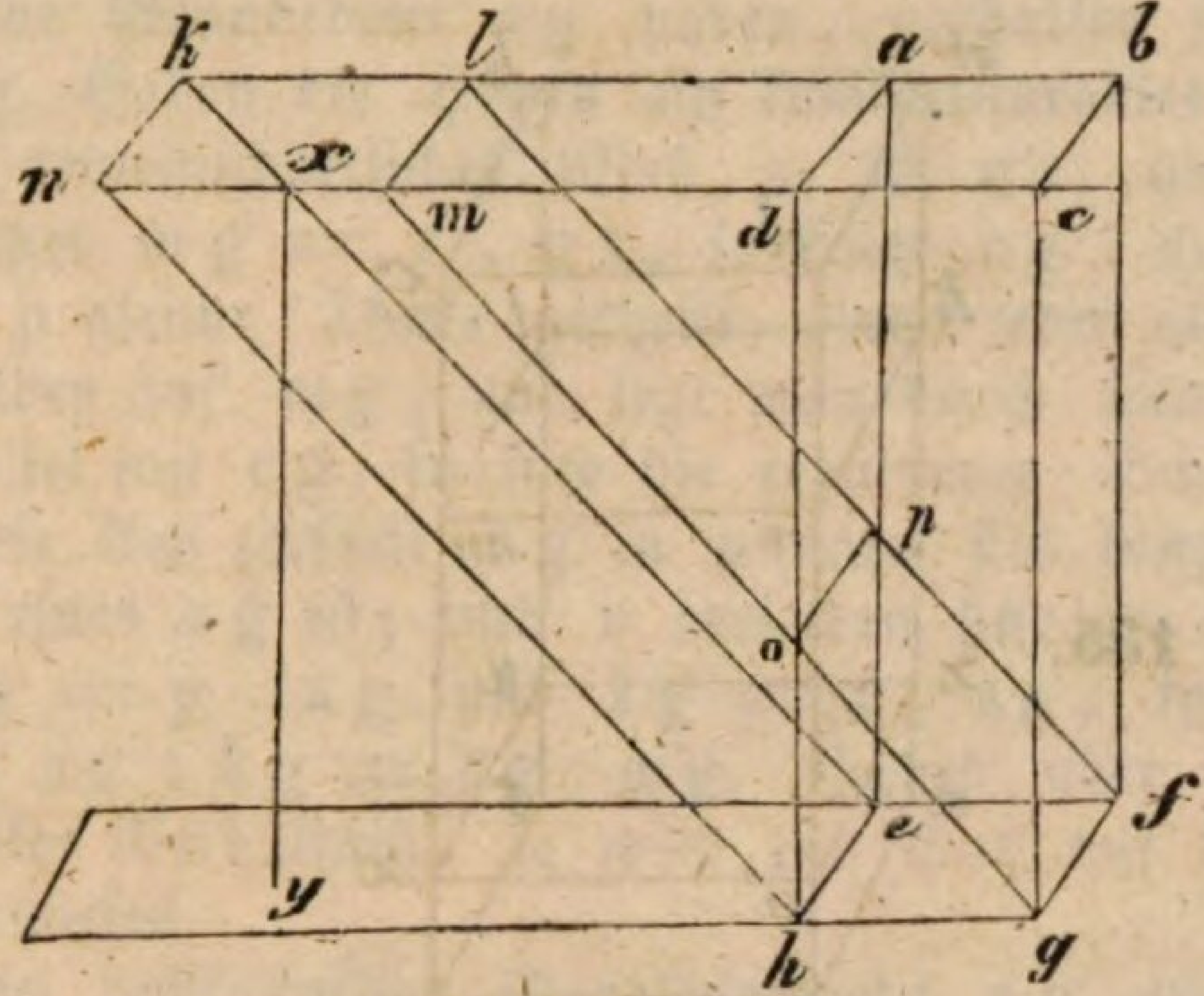


Fig. 133.

Sind aber die Parallelepipeda a g und k g (Fig. 134.), welche die gemeinschaftliche Grundebene e f g h und gleiche Höhen haben, so

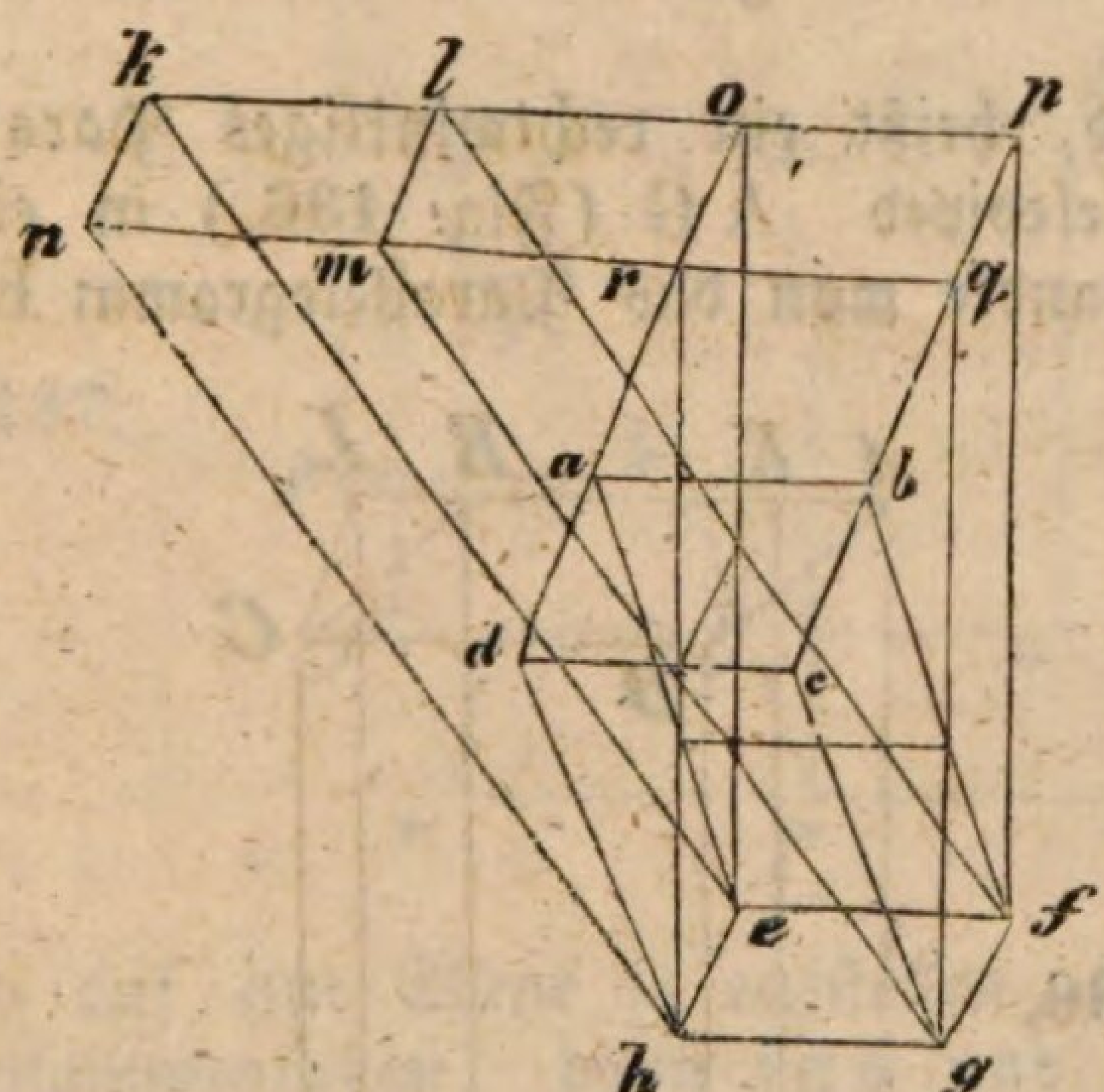


Fig. 134.

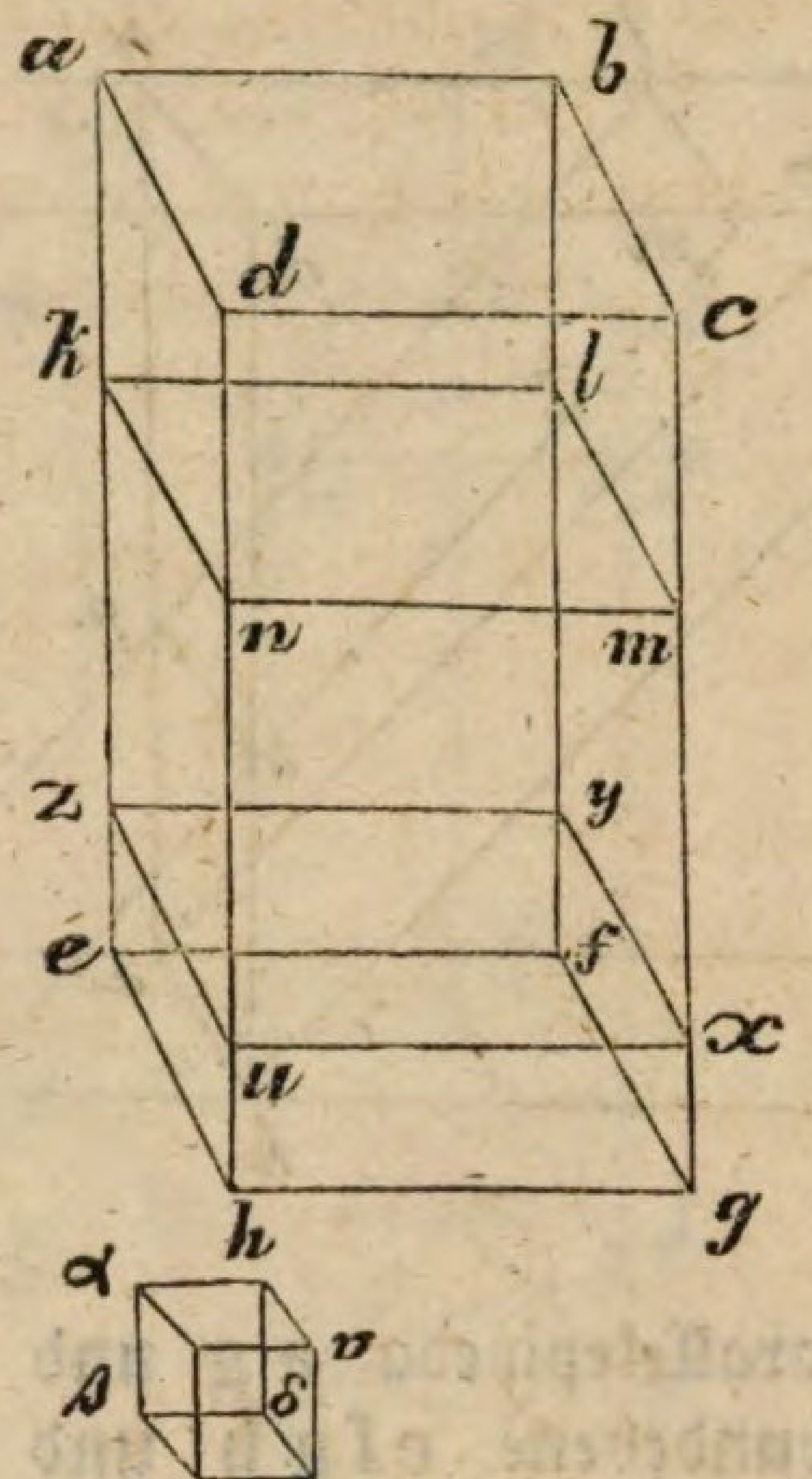
beschaffen, daß die Seitenebenen b g und l g in verschiedenen Ebenen liegen, so verlängere man die Seitenebenen b g, a h, n g und k f bis die Durchschnitte g q, f p, h r und e o entstehen; und nun ergibt sich mittelst der Ebene, in welcher die obern Grundebenen a c und k m liegen, der Durchschnitt o p q r und man hat, wie leicht einzusehen ist, ein Parallelepiped o g, welches nach dem frühern Beweise = a g und k g ist; daher muß auch a g = k g sein.

5) Hat man ein schiefes Parallelepiped k g (Fig. 133.) in ein gerades zu verwandeln, so errichte man von den Punkten e, f, g und h aus auf e g die Senkrechten e a, f b, g c und h d, lege hierauf durch die Parallelen e a und f b, f b und g c, g c und h d, dann h d und e a Ebenen, die von der Ebene, in welcher k m liegt, in a b, b c, c d und d a geschnitten werden; wodurch offenbar ein gerades Parallelepiped a g entsteht, welches dem schiefen k g gleich ist.

§. 107. Rechtwinklige Parallelepipeda.

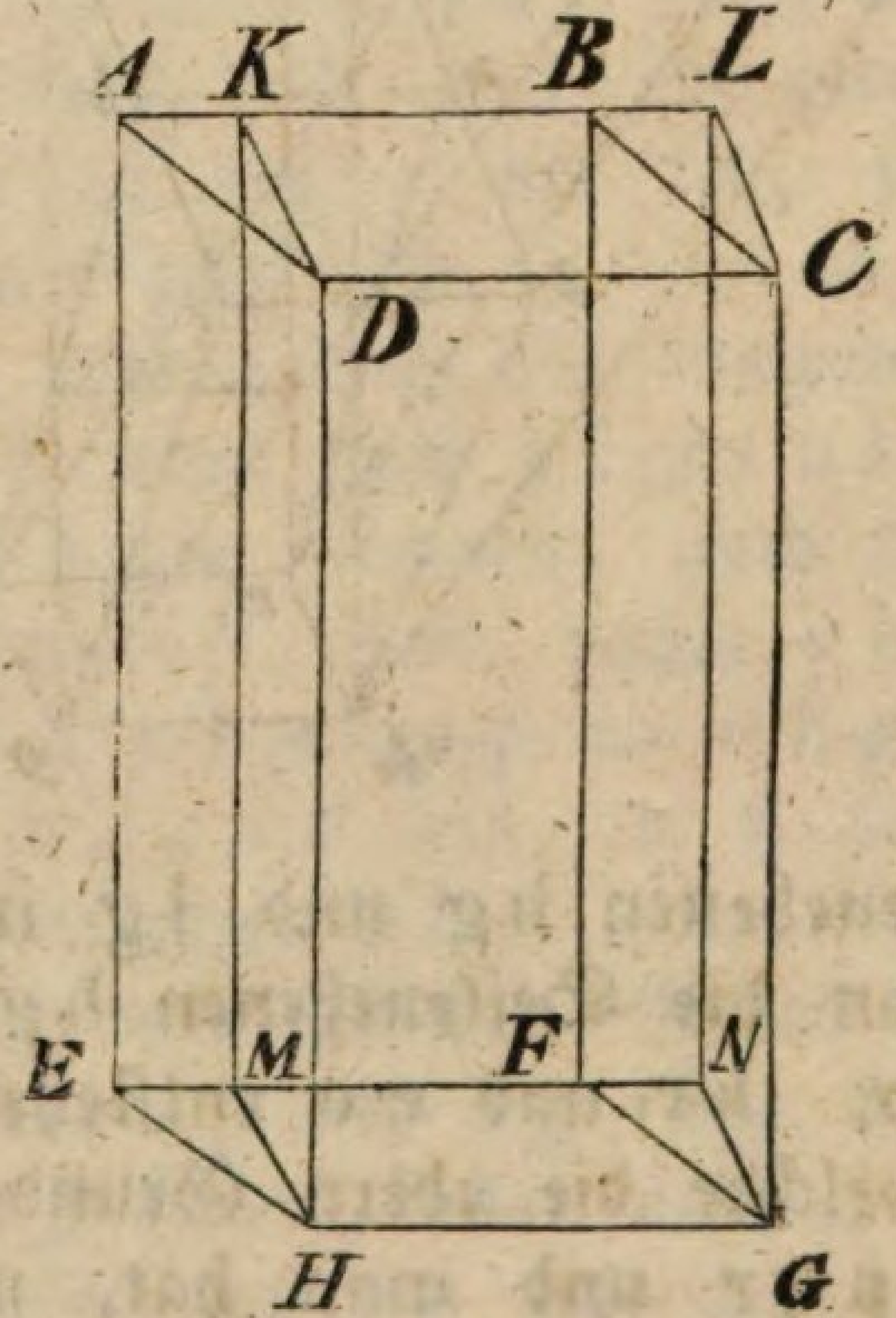
1) Ein gerades Parallelepiped ag (Fig. 135.), dessen Grundebenen eg und ac Rechtecke sind, ein Körper also, der von sechs Recht-

Fig. 135.



ecken begrenzt wird, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Hat man ein gerades Parallelepiped AG (Fig. 136.) in ein rechtwinkliges zu umstalten, so verwandle man das Parallelogramm EG in ein Rechteck,

Fig. 136.



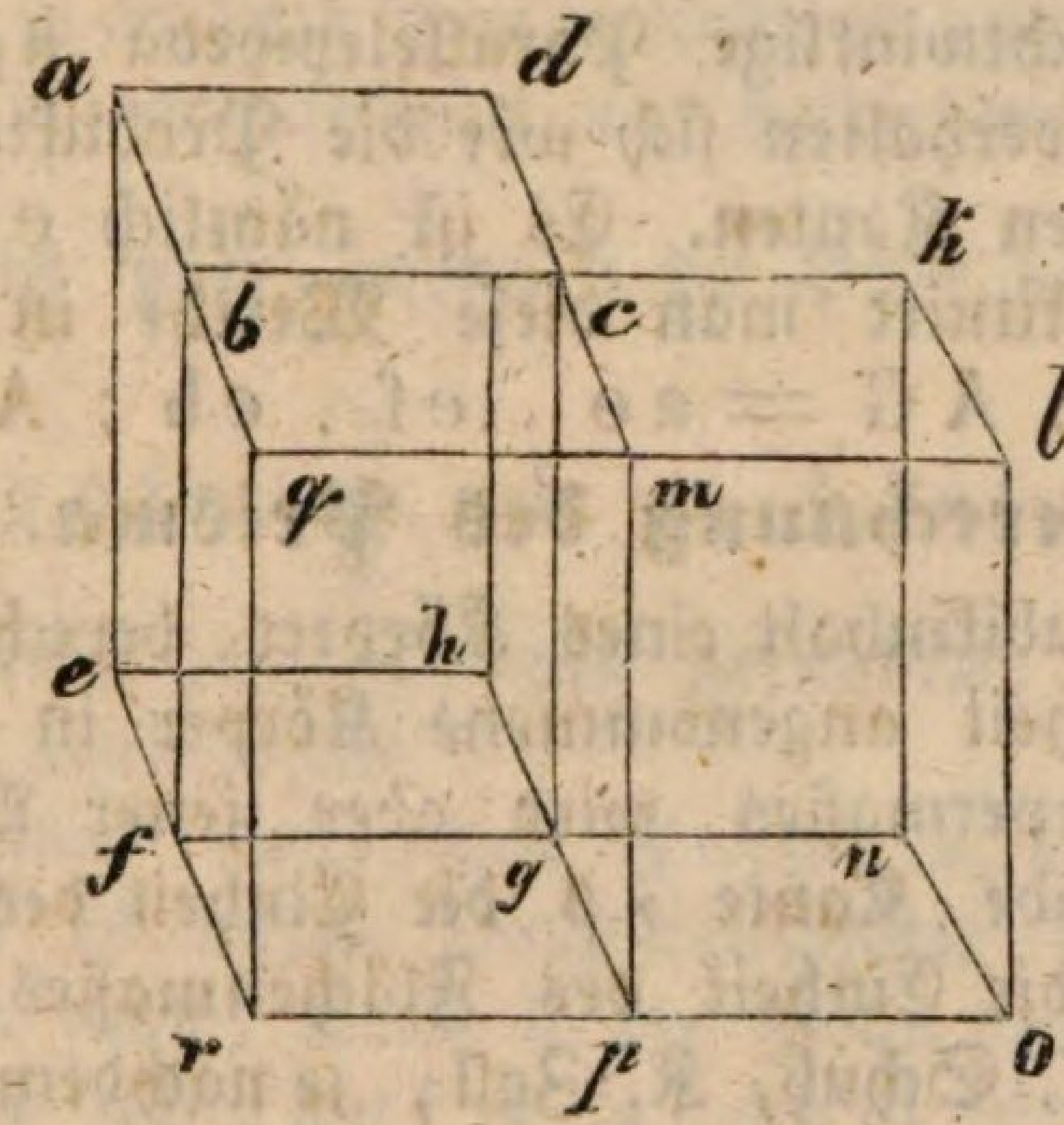
indem man von H und G auf EF die Senkrechten MH und NG errichtet, dann durch die W. DHM und CGN Ebenen legt, deren erstere die Grenzebenen des Parallelepipeds, letztere aber ihre Verlängerung schneidet. Auf diese Art entsteht ein rechtwinkliges Parallelepiped KG, welches mit AG gleiche Basis hat; und da AG und KG auch gleiche Höhen haben, so folgt KG = AG. Da jedes schiefe Parallelepiped in ein gerades, und letzteres in ein rechtwinkliges verwandelt werden kann, so kann jedes schiefe Parallelepiped in ein rechtwinkliges verwandelt werden. Ein rechtwinkliges Parallelepiped v (Fig. 135.), wel-

ches von sechs kongruenten Quadraten begrenzt wird, heißt Kubus oder Würfel.

2) Zwei rechtwinklige Parallelepipeda ag und kg (Fig. 135.), welche dieselbe Grundebene eg haben, verhalten sich wie ihre Höhen cg und mg. Haben die Höhen ein kommensurables Verhältniß, so besitzen sie ein gemeinschaftliches Maß, z. B. gx, und nun sei cg = p . gx, ferner mg = r . gx, so folgt cg : mg = p : r. Wird nun cg in p gleiche Theile getheilt, deren jeder also gx ist, so kommen r derselben auf mg, und legt man durch sämmtliche Theilpunkte Ebenen parallel mit eg, so sind die erhaltenen Schnitte kongruent mit eg; auf diese Art zerfällt ag in p unter sich kongruente Parallelepipeda, deren eines zg ist; und r derselben sind in kg enthalten; man hat also ag = p . zg und kg = r . zg, folglich ag : kg = p : r, somit ag : kg = cg : mg. Haben aber die Höhen ein inkommensurables Verhältniß, so wird der Satz auf ähnliche Art, wie in §. 27. 1., erwiesen.

3) Zwei rechtwinklige Parallelepipeda ag und co (Fig. 137.) von derselben Höhe verhalten sich wie ihre Grundebenen. Offenbar kann

Fig. 137.



man ag und co auf eine Ebene so aufstellen, daß beide Körper mit der Kante gc zusammenfallen, dann fgn und hgp gerade Linien bilden; dann müssen, weil ag und co dieselbe Höhe haben, auch die obern Grundebenen ac und cl in der nämlichen Ebene liegen, ferner dcm und bck gerade Linien sein. Verlängert man zwischen den Ebenen al und eo die Seitenebenen mo und af bis der Durchschnitt rq entsteht; so ergibt sich das Parallelepiped rc, welches mit ag das Rechteck bg gemeinschaftlich hat; wird dieses als Basis von ag und bp betrachtet, so folgt nach 2. ag : bp = hg : gp; auf gleiche Weise findet man auch, wenn cp als gemeinschaftliche Grundebene von bp und co betrachtet wird, bp : co = fg : gn Durch Zusammensetzung beider Proportionen erhält man

$$ag : co = hg . fg : gp . gn = eg : go.$$

4) Zwei rechtwinklige Parallelepipeda ag (Fig. 135.) und AG (Fig. 138.) stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundebenen und Höhen. Man mache ek = AE und lege durch k die Ebene

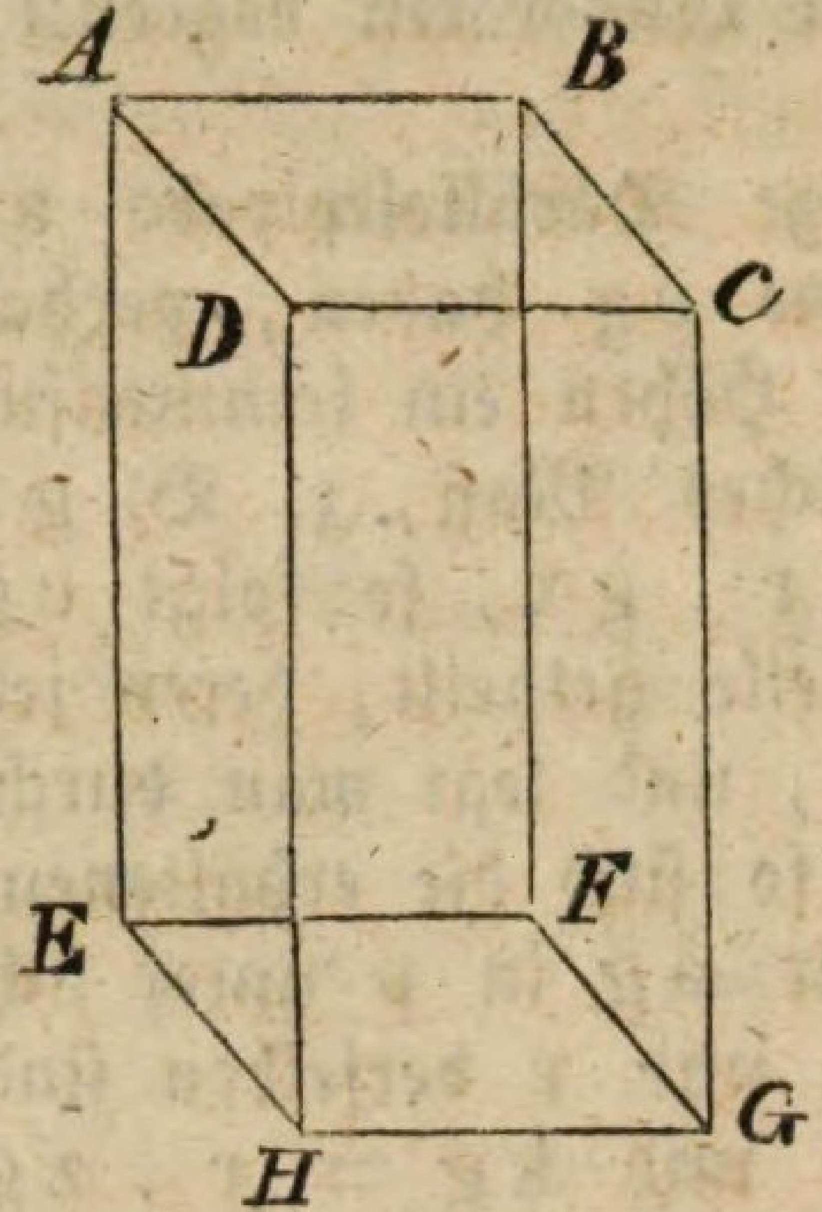


Fig. 138.

km || eg, so haben ag und kg die gemeinschaftliche Grundebene eg, somit ergibt sich nach 2. ag : kg = ae : ke = ae : AE. Nun haben kg und AG gleiche Höhen, folglich findet man nach 3. kg : AG = eg : EG. Werden die beiden letzten Proportionen zusammengesetzt, so folgt ag : AG = ae . eg : AE . EG.

5) Zwei rechtwinklige Parallelepipeda ag und AG (Fig. 135. und Fig. 138.) verhalten sich wie die Produkte aus den drei in eine Ecke zusammenstoßenden Kanten. Es ist nämlich eg = ef . eh und EG = EF . EH; substituirt man diese Werthe in die letzte Proportion, so erhält man ag : AG = ae . ef . eh : AE . EF . EH.

§. 108. Berechnung des Prisma.

1) Den Kubikinhalt eines Körpers berechnen heißt bestimmen, wie oft der als Einheit angenommene Körper in jenem enthalten sei. Als Einheit des Körpermaßes wird aber jener Würfel v (Fig 135.) betrachtet, dessen jede Kante $\alpha\beta$ die Einheit des Linienmaßes, somit jede Grenzebene $\alpha\gamma$ die Einheit des Flächenmaßes ist. Der Würfel v heißt Kubik-Klafter, K.-Schuh, K.-Zoll, je nachdem jede Kante desselben die Länge einer Klafter, eines Schuhes oder eines Zolles besitzt. Es ist leicht einzusehen, daß die K.-Klafter $= 6^3 = 216$ K.-Schuh sei; denn man braucht nur die drei in eine Ecke zusammenstoßenden Kanten einer K.-Klafter in sechs gleiche Theile zu theilen, und durch die Theilpunkte jeder Kante auf sie senkrechte Ebenen zu führen, wodurch 216 kongruente Würfel, deren jeder ein K.-Schuh ist, entstehen. Eben so zeigt sich, daß der K.-Schuh $= 12^3 = 1728$ K.-Zoll sei.

2) Um den Kubikinhalt des rechtwinkligen Parallelepipeds ag (Fig. 135.) zu bestimmen, wollen wir es auf die Kubikeinheit v beziehen, und auf beide Körper den §. in 107. 5. erwiesenen Lehrsatz anwenden; so folgt ag : v = ae . ef . eh : $\alpha\beta . \beta\gamma . \beta\delta$, es ist aber $\alpha\beta = \beta\gamma = \beta\delta = 1$, somit ergibt sich ag : v = ae . ef . eh : 1, daher ag = ae . ef . eh . v, d. h. ag enthält die Kubikeinheit v so oft, als das Produkt der Zahlen, welche die Größen der drei in eine Ecke zusammenstoßenden Kanten vorstellen, anzeigt. Ist z. B. ae $= 6 . \alpha\beta$, ef $= 3 . \alpha\beta$ und eh $= 2 . \alpha\beta$, so findet man ag $= 6 . 3 . 2 . v = 36 . v$.

Setzt man auch $v = 1$, so folgt $ag = ae \cdot ef \cdot eh$; es ist aber $ef \cdot eh = eg$, also wird $ag = eg \cdot ae$. Die auf die Grundebene eg senkrechte Kante ae ist die Höhe; daher wird auch der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds gefunden, wenn man die Grundebene mit der Höhe multiplizirt.

3) Ist $ae = ef = eh$ (Fig. 135.), so geht ag in einen Würfel über, und man hat $ag = ae^3$; der Inhalt eines Würfels wird also berechnet, wenn man die, eine Kante desselben vorstellende Zahl auf die dritte Potenz erhebt.

4) Da nach §. 106. 4. jedes Parallelepiped einem rechtwinkligen gleich ist, welches mit ihm gleiche Grundebene und Höhe hat; so wird der Inhalt eines jeden Parallelepipeds bestimmt, wenn man die Grundebene mit der Höhe multiplizirt. Bei Berechnung eines schiefen Parallelepipeds kg (Fig. 133.) ist es aber erforderlich, von einem beliebigen Punkte der obern Grundebene auf die untere eine Senkrechte xy zu ziehen, um die Höhe des Körpers zu erhalten, und dann ist $kg = eg \cdot xy$.

5) Hat man den Inhalt eines dreiseitigen Prisma $abcgfe$ (Fig. 131.) zu berechnen, so ergänze man dasselbe zu einem Parallelepiped bh. Da dieses durch den Diagonalschnitt ag halbirt wird, so ergibt sich $abcgfe = \frac{bh}{2}$ Nun ist aber, wenn h die Höhe bezeichnet, $bh = fh \cdot h$, somit folgt $abcgef = \frac{fh}{2} \cdot h = \triangle\, efg \cdot h$. Es wird also der Inhalt eines dreiseitigen Prisma gefunden, wenn man die Grundebene mit der Höhe multiplizirt.

6) Ist der Inhalt eines vielseitigen Prisma alh (Fig. 128.) zu bestimmen, so theile man es durch Diagonalschnitte bk und ak in dreiseitige, und nun findet man, wenn h die Höhe desselben ausdrückt,

$$alh = bcdkgh + abdkgf + aedkfl =$$
$$\triangle\, ghk \cdot h + \triangle\, kgf \cdot h + \triangle\, kfl \cdot h = (ghk + kgf + kfl)\, h$$

$= hl \cdot h$. Es wird also der Inhalt eines jeden Prisma gefunden, wenn man die Grundebene mit der Höhe multiplizirt.

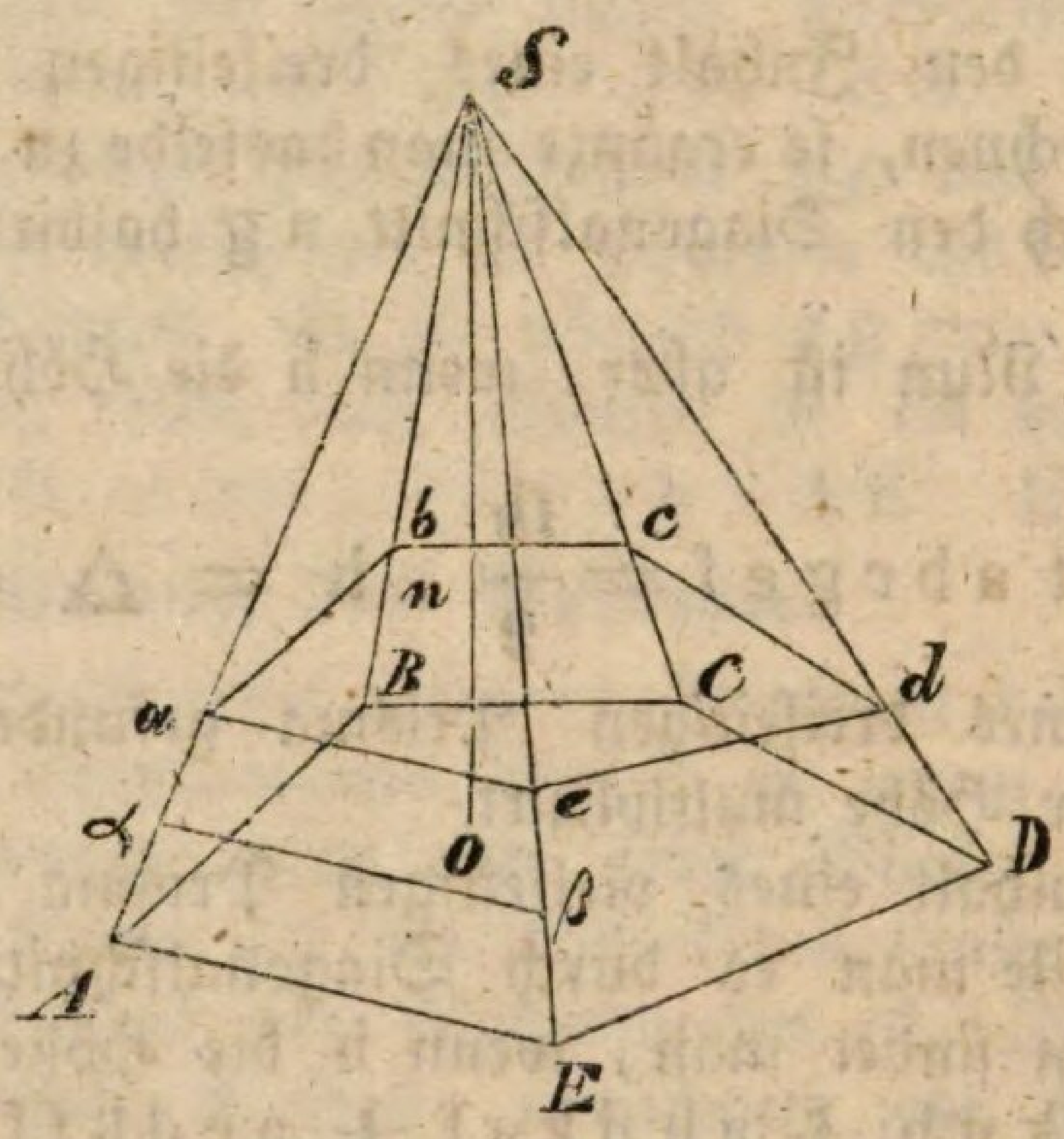
7) Sind K und k die Inhalte, B und b die Grundebenen, dann H und h die Höhen zweier Prismen, so folgt $K : k = B \cdot H : b \cdot h$; zwei Prismen stehen also im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundebenen und Höhen. Ist $K = k$, so ist auch $B \cdot H = b \cdot h$, daher $B : b = h : H$; in gleichen Prismen sind also die Grundebenen den Höhen verkehrt proportionirt. Ist in der ersten Proportion $B = b$, so hat man $K : k = H : h$; Prismen von gleichen Grundebenen verhalten sich also wie ihre Höhen, und eben so zeigt sich, daß Prismen von gleichen Höhen sich wie ihre Grundebenen verhalten. Ist endlich $B = b$ und $H = h$, so muß auch $K = k$ sein; Prismen, die gleiche Grundebenen und Höhen haben, sind also gleich.

8) Die Oberfläche eines Prisma berechnen heißt bestimmen, wie oft die Einheit des Flächenmaßes in der Summe der Flächeninhalte aller Grenzebenen enthalten sei. Die Oberfläche O (Fig. 128.) eines

Prisma besteht aus der Summe S der Flächeninhalte aller Seitenebenen, und dem doppelten Flächeninhalte F einer Grundebene; daher hat man $O = S + 2 . F$. Um die Größe S rücksichtlich eines schiefen Prisma a l h zu berechnen, wollen wir auf sämmtliche Kanten einen senkrechten Schnitt m p führen, und nun ergibt sich $S = al + ek + dh + \ldots = el . mq + dk . pq + ch . op + \ldots$, oder, da alle Kanten gleich sind, $S = (mq + pq + op + \ldots) el$. Der Seiten-Flächeninhalt wird also gefunden, wenn man den Umfang des auf eine Kante senkrecht geführten Schnittes mit einer Kante multiplizirt. Ist aber das Prisma a l h gerade, so sind die Seitenebenen Rechtecke, deren gemeinschaftliche Höhe jede Kante anzeigt; daher hat man $S = fl . le + lk . le + hk . le + \ldots = (fl + lk + hk + \ldots) le$. In diesem Falle muß man also den Umfang der Basis mit einer Kante multipliziren.

§. 109. **Eigenschaften der Pyramiden.** Eine Pyramide S A C (Fig. 139.) ist ein Körper, welcher von einem Polygone A D C

Fig. 139.



und von Dreiecken S A B, S B C, S C D u. s. w, die in einem Punkt S zusammentreffen, und die Seiten A B, B C, C D u. s. w. jenes Polygons zur Basis haben, begrenzt ist. Jenes Polygon heißt Grundebene und S die Spitze der Pyramide, jene Dreiecke hingegen werden Seitenebenen genannt, und der Durchschnitt A S zweier Seitenebenen S A B und S A E heißt Kante; die Senkrechte S O endlich, welche von der Spitze auf die Basis gefällt ist, heißt Höhe der Pyramide. Nach der Seitenanzahl der Grundebene theilt man die Pyramiden in drei-, vier- und mehrseitige ein. Sind in einer Pyramide alle Kanten gleich, also die Seitenebenen gleichschenklige Dreiecke, so heißt sie eine gerade; sonst aber wird sie eine schiefe genannt. Eine gleichseitige Pyramide endlich ist jene gerade, deren Basis ein reguläres Polygon ist. Die Seitenebenen derselben sind also kongruente gleichschenklige Dreiecke.

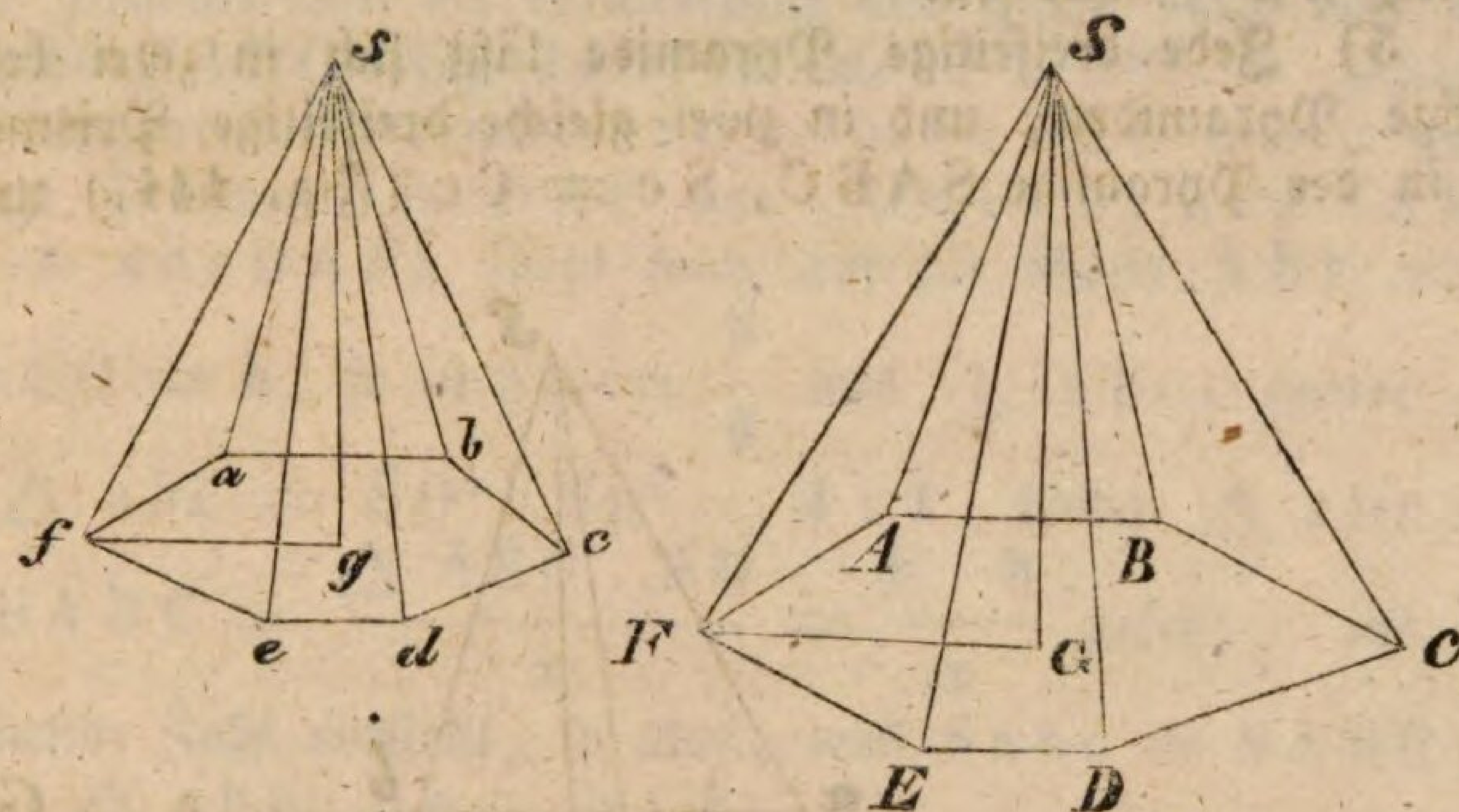
1) Zwei Pyramiden sind kongruent, wenn sie an der Basis eine Ecke besitzen, welche von drei kongruenten Grenzebenen auf dieselbe Art gebildet ist. Der Beweis wird wie im §. 105. 4. geführt.

2) Zwei Pyramiden sind ähnlich, wenn die Ecken der einen jenen

der andern in derselben Ordnung kongruent sind, und beide Pyramiden, von wechselweise ähnlichen Grenzebenen, auf dieselbe Art gebildet werden; denn sie unterscheiden sich in diesem Falle nur durch ihre Größe voneinander. In ähnlichen Pyramiden wollen wir jene Kanten, welche homologe Seiten ähnlicher Seitenebenen sind, folglich proportionirt sein müssen, ebenfalls homologe nennen; so wie die wechselweise kongruenten Ecken und ähnlichen Seitenebenen in ähnlichen Pyramiden homolog genannt werden sollen; welche Benennungen auch bei ähnlichen Prismen gebraucht werden können. Die homologen Größen bei ähnlichen Pyramiden wollen wir in der Regel mit denselben Buchstaben bezeichnen.

3) In ähnlichen Pyramiden S F C und s f c (Fig. **140.**) sind die

Fig. **140.**



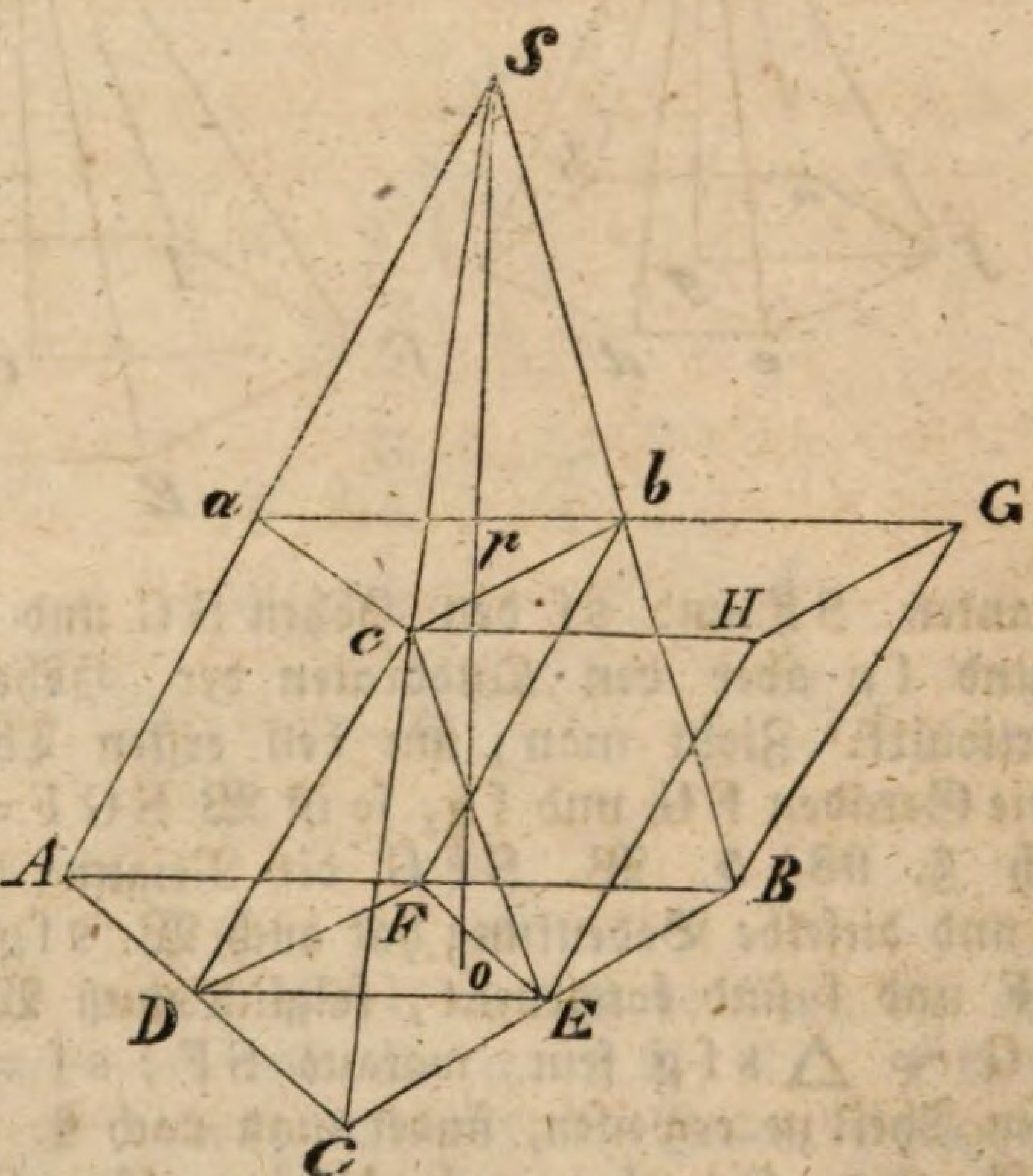
homologen Kanten S F und s f den Höhen S G und s g, die Grundebenen F C und f c aber den Quadraten der Höhen und homologen Kanten proportionirt. Zieht man, um den ersten Theil unsers Satzes zu beweisen, die Geraden F G und f g, so ist W. S G F = W. s g f = R; ferner ist nach §. 98. 5. W. S F G die Neigung der Kante S F zur Grundebene, und dieselbe Bedeutung hat auch W. s f g; allein die homologen Ecken F und f sind kongruent, folglich muß W. S F G = s f g, daher △ S F G ∼ △ s f g sein, woraus S F : s f = S G : s g folgt. Um den zweiten Theil zu erweisen, findet man nach §. **44. 4.** F C : f c = $AF^2 : af^2$, man hat aber auch $AF^2 : af^2 = SF^2 : sf^2 = SG^2 : sg^2$, weil die ersten Potenzen dieser Größen proportionirt sind; daher ergibt sich $FC : fc = SG^2 : sg^2 = SF^2 : sf^2$. Diese beiden Sätze können auch für ähnliche Prismen auf dieselbe Art erwiesen werden.

4) Wird eine Pyramide S A C (Fig. **139.**) parallel mit der Basis geschnitten, so ist α) der Schnitt a d c ähnlich der Basis; β) die kleine Pyramide S a d der größern ähnlich; γ) der Schnitt und die Basis sind den Quadraten ihrer Abstände von der Spitze S proportionirt; und endlich δ) wird durch jenen Schnitt eine Kante S A halbirt, so halbirt er auch alle übrigen und die Höhe der Pyramide. α) Da a d c || A D C ist, so ist nach §. **102. 2.** a b || A B, daher △ S a b ∼ S A B, folglich S A : S a = A B : a b, eben so zeigt sich auch S A : S a = A E : a e, somit hat man A B : a b = A E : a e, und auf gleiche Art ergibt sich die Proportionalität der übrigen Seiten der Polygone A D C und a d c; ferner

ist nach §. 98. 4. W. BAE = bae, W. AED = aed u. s. w. Daher adc ∼ ADC. β) Die Pyramiden Sadc und SADC haben nach α) alle Grenzebenen ähnlich, daher kommt es nur noch auf die Kongruenz der Ecken an; nun ist W. Sab = SAB, W. Sae = SAE, und W. bae = BAE, somit muß nach §. 104. 3. die Ecke a ≅ A sein, und eben so folgt e ≅ E u. s. w.; daher ist Sadc ∼ SADC. Zieht man SO ⊥ ADC, so ist auch nach §. 101. 1, Sn ⊥ adc und da Sadc ∼ SADC ist, so folgt nach 3. adc : ADC = $Sn^2 : SO^2$. γ) In ähnlichen Pyramiden SAC und sac sind nach 2. und 3. die homologen Kanten unter sich und den Höhen proportionirt; wenn nun Sa = Aa ist, so muß daher auch Sb = Bb, Sc = Cc u. s. w., endlich Sn = On sein

5) Jede dreiseitige Pyramide läßt sich in zwei kongruente dreiseitige Pyramiden, und in zwei gleiche dreiseitige Prismen theilen. Es sei in der Pyramide SABC, Sc = Cc (Fig. 141.) und der Schnitt

Fig. 141.



abc ∥ ABC, so muß Sa = Aa und Sb = Bb sein, ist ferner DcE ∥ ASB, so folgt AD = DC und BE = CE; auch zeigt sich, daß aD und bE Parallelogramme seien. Da nun Sc = Cc, ac = DC und W. Sca = cCD ist, so ist △ aSc ≅ DcC, und eben so folgt, daß △ bSc ≅ EcC sei; werden endlich die Dreiecke abc und DCE verglichen, so zeigt sich ac = DC, bc = CE und W. acb = DCE, somit ihre Kongruenz, und daher ist Sabc ≅ cDEC. Wird DF ∥ BE gezogen, so folgt DF ⧺ BE, und da auch bc ⧺ BE ist, so muß nach §. 98. 3. DF ⧺ bc, somit, wenn man die Gerade bF zieht, Db ein Parallelogramm sein; auch zeigt sich leicht, daß aF und BD Parallelogramme sein müssen. Dem Vorhergehenden gemäß ist △ abc ≅ ADF, und verbindet man E mit F, so folgt △ ADF ≅ DFE, ferner ergibt sich △ DcE ≅ FbB; also sind abcDAF und cDEBFb

dreiseitige Prismen. Zieht man durch BE die Ebene EG || Db und verlängert hierauf die Ebenen DcE, abc und bFB, so ergeben sich die Durchschnitte HE, Hc, HG, bG und BG und es entsteht das Parallelepiped DG mit dem Diagonalschnitte bE; daher ist cDEBFb $= \frac{1}{2}$ DG. Die Prismen abcDAF und DG, als zwischen parallelen Ebenen liegend, haben gleiche Höhen und verhalten sich daher nach §. 108. 7. wie ihre Grundebenen; aber es ist $\triangle$ ADF $= \frac{1}{2}$ BD, folglich muß auch abcDAF $= \frac{1}{2}$ DG, daher abcDAF $=$ cDEBFb sein.

§. 110. Berechnung der Pyramiden.

1) Der Kubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide wird gefunden, wenn man das Produkt aus der Grundebene und Höhe durch drei dividirt. Man theile SABC (Fig. 141.) auf die in §. 109. 5. gezeigte Weise in zwei kongruente Pyramiden Sabc und cDEC und in zwei gleiche dreiseitige Prismen abcDAF und cDEBFb, so ist SABC $= 2$ (Sabc $+$ abcDAF). Zieht man auf die Basis ABC $=$ b die Senkrechte SO $=$ h, so ist Sp $= \frac{h}{2}$ und $\perp$ abc; ferner ergibt sich b : $\triangle$ abc $= SO^2 : Sp^2 = 4 : 1$, daher $\triangle$ abc $= \frac{b}{4}$ Wird nun SABC $= \frac{\triangle ABC \,.\, SO}{x} = \frac{b \,.\, h}{x}$ gesetzt, wo x eine zu bestimmende Zahl vorstellt, so muß, weil Sabc $\sim$ SABC ist, auch Sabc $= \frac{\triangle abc \,.\, Sp}{x} = \frac{b \,.\, h}{8x}$ sein; und da ferner abcDAF $= \triangle$ ADF . op $= \frac{b \,.\, h}{8}$ ist; so ergibt sich durch Substitution jener Werthe in obige Gleichung $\frac{b \,.\, h}{x} = \frac{b \,.\, h}{4x} + \frac{b \,.\, h}{4}$ oder $\frac{1}{x} = \frac{1}{4x} + \frac{1}{4}$, somit x $= 3$; daher ist SABC $= \frac{\triangle ABC \,.\, SO}{3}$

2) Der Kubikinhalt einer vielseitigen Pyramide SADC (Fig. 139.) wird wie jener einer dreiseitigen gefunden. Legt man durch die W. BSD und ASD Ebenen, so entstehen in der Grundebene die Schnitte BD und AD, und die Pyramide SADC zerfällt in die dreiseitigen SBCD, SABD und SADE, durch deren Berechnung, wenn h die Höhe derselben anzeigt, sich ergibt

$$SADC = (\triangle BCD + \triangle ABD + \triangle ADE)\,\frac{h}{3} = \frac{ACE \,.\, h}{2}$$

3) Sind K und k die Kubikinhalte, B und b die Grundebenen, endlich H und h die Höhen zweier Pyramiden, so hat man K : k $= \frac{B \,.\, H}{3} : \frac{b \,.\, h}{3} =$ B . H : b . h. Die im §. 108. 7. für Prismen entwickelten Sätze müssen daher auch bei Pyramiden stattfinden.

4) Die Kubikinhalte ähnlicher Pyramiden SFC und sfc (Fig. 140.) sind den dritten Potenzen ihrer Höhen und homologen Kanten proportionirt.

Vermöge §. 109. 3. findet man nämlich $FC : fc = SG^2 : sg^2 = SA^2 : sa^2$ und $SG : sg = SG : sg = SA : sa$, und durch Zusammensetzung dieser Ausdrücke ergibt sich

$$\frac{FC \, . \, SG}{3} : \frac{fc \, . \, sg}{3} = SG^3 : sg^3 = SA^3 \, . \, sa^3.$$ Dieser Satz läßt sich auch für ähnliche Prismen eben so beweisen.

5) Die Oberfläche O (Fig. 139.) einer Pyramide besteht aus der Summe S der Flächeninhalte aller Seitenebenen und dem Flächeninhalte F der Grundebene; daher ist $O = S + F$. Rücksichtlich einer gleichseitigen Pyramide SADC wird die Größe S berechnet, wenn man den Flächeninhalt einer Seitenebene SAB mit der Anzahl aller multiplicirt. Ist nun die Pyramide nseitig, und h die in der Ebene SAB von S auf AB gezogene Senkrechte, so hat man $S = n \, . \, AB \, . \, \frac{h}{2}$ Es wird also der Seiten-Flächeninhalt einer gleichseitigen Pyramide gefunden, wenn man den Umfang $n \, . \, AB$ der Basis mit der halben Höhe $\frac{h}{2}$ einer Seitenebene multiplizirt. Ist aber die Pyramide nicht gleichseitig, so muß man, um die Größe S zu finden, jede Seitenebene einzeln berechnen, und die erhaltenen Resultate summiren.

§. 111. **Von der abgekürzten Pyramide.** Wird eine Pyramide SADC (Fig. 139.) parallel mit der Basis geschnitten, so heißt das zwischen den parallelen Ebenen ADC und adc liegende Stück eine abgekürzte Pyramide. Diese ist nämlich ein Körper, welcher von zwei parallelen und nach §. 109. 4. ähnlichen Polygonen und von Trapezen, deren parallele Seiten zugleich Seiten jener Polygone sind, begrenzt wird. Jene Polygone werden Grundebenen und die Trapeze Seitenebenen genannt; der Abstand der Grundebenen endlich ist die Höhe des Körpers.

1) Sind die Grundebenen $ADC = B$ und $adc = b$, ferner die Höhe h der abgekürzten Pyramide gegebene Größen, so läßt sich der Kubikinhalt des Körpers auf folgende Art berechnen. Man ergänze ihn zu einer vollständigen Pyramide SADC und ziehe $SO \perp ADC$, so ist auch $Sn \perp adc$, daher $on = h$, und wird $Sn = x$ gesetzt, so ergibt sich $SADC = \frac{B\,(h + x)}{3}$ und $Sadc = \frac{b \, . \, x}{3}$, folglich für die gesuchte Größe $K = SADC - Sadc = \frac{B \, . \, h}{3} + \frac{x}{3}\,(B - b)$. Nun hat man aber nach §. 109. 4. $B : b = (h + x)^2 : x^2$, also $\sqrt{B} : \sqrt{b} = h + x : x$ und hieraus $x = \frac{h \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$, daher folgt durch Sub-

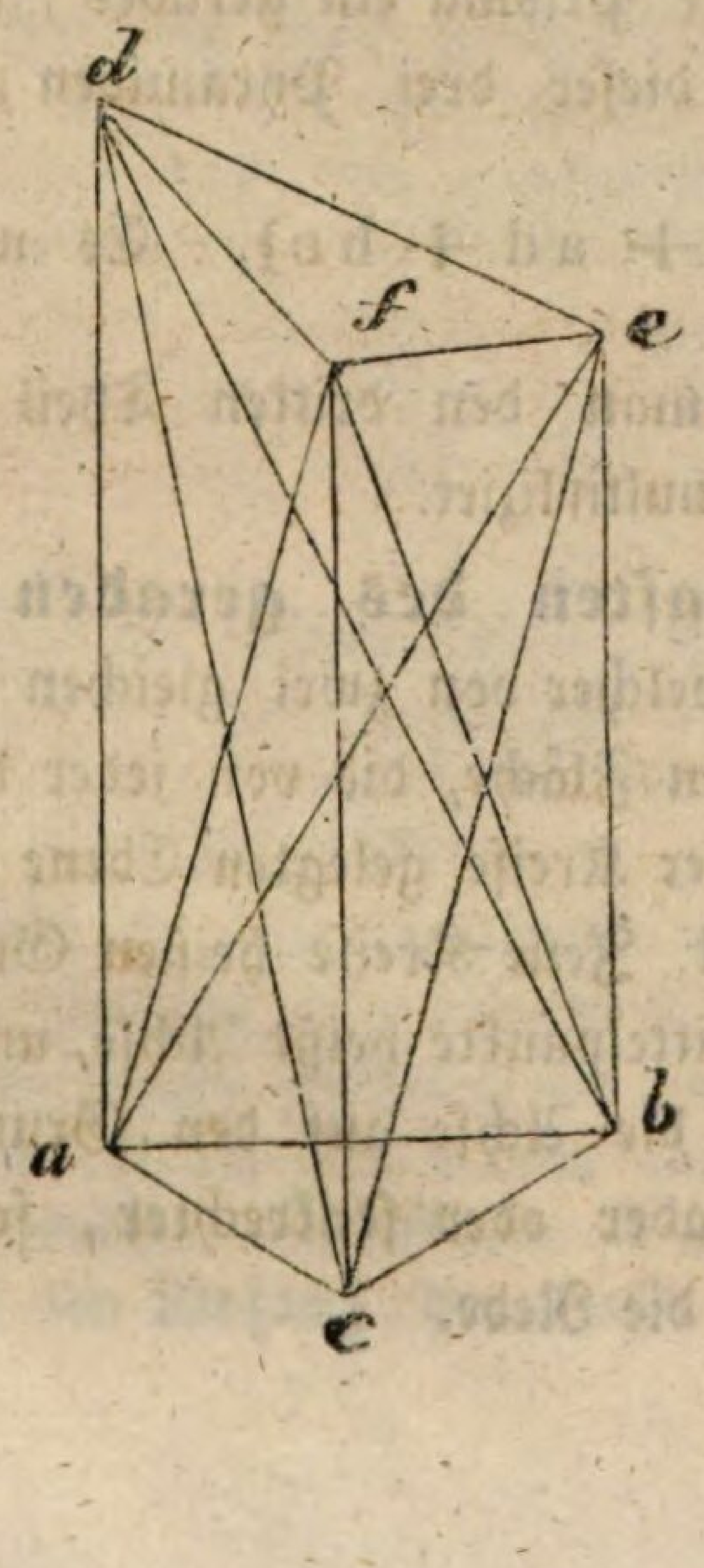
stitution dieses Werthes, mit Berücksichtigung der Gleichung $B - b = (\sqrt{B} + \sqrt{b})(\sqrt{B} - \sqrt{b})$ der Ausdruck

$$K = \frac{B \cdot h}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3}(\sqrt{B} + \sqrt{b}) = \frac{h}{3}(B + \sqrt{B \cdot b} + b).$$

2) Die Oberfläche O (Fig. **139.**) einer abgekürzten Pyramide besteht aus den Flächeninhalten B und b der Grundebenen, und aus jenen sämmtlicher Seitenebenen; heißt die Summe der letztern S, so folgt $O = B + b + S$. Ist die abgekürzte Pyramide A a d D durch den Schnitt einer gleichseitigen S A D C entstanden, so müssen die Seitenebenen kongruente Trapeze sein. Denn da vermöge §. **109. 4.** auch die kleine Pyramide S a d c eine gleichseitige ist, also ihre Seitenebenen kongruent und gleichschenklig sind; so müssen die Differenzen zwischen den Seitenebenen der großen und kleinen Pyramide kongruent sein. Die Größe S wird in diesem Falle offenbar gefunden, wenn man nur ein Trapez a E berechnet und das Resultat mit der Anzahl aller multiplizirt. Ist nun $A\alpha = a\alpha$, $\alpha\beta \parallel AE$ und h der Abstand der parallelen Seiten, so ergibt sich nach §. **42.** $aE = \alpha\beta \cdot h$ und ist n die Anzahl der Seitenebenen, so hat man endlich $S = n\,\alpha\beta \cdot h$. Da nun $n \cdot \alpha\beta$ der Umfang desjenigen regulären Polygons ist, welches aus den, durch α parallel zur Basis geführten Schnitt hervorgeht; so hat man die Regel: der Seiten-Flächeninhalt einer abgekürzten gleichseitigen Pyramide wird gefunden, wenn man den Umfang des, durch die Mitte einer Kante parallel geführten Schnittes mit der Höhe einer Seitenebene multiplizirt.

§. **112. Vom abgekürzten dreiseitigen Prisma.** Wird von einem dreiseitigen Prisma durch eine mit der Basis a b c (Fig. **142.**) nicht parallele Ebene d e f ein Theil abgeschnitten, so heißt der Rest a b c d e f ein abgekürztes dreiseitiges Prisma. Der Inhalt dessel-

Fig. **142.**



ben, gleicht dreien Pyramiden, welche mit dem Prisma einerlei Basis a b c haben, und deren Spitzen die Scheitel d, e auf f der Winkel jenes Schnittes sind. Man lege durch f und a b eine Ebene, so gibt sie die Schnitte a f und f b und es zerfällt der ganze Körper in zwei Theile f a b c und f a b e d, deren ersterer eine dreiseitige, letzterer aber eine vierseitige Pyramide ist. Wegen der leichtern Uebersicht wollen wir die Pyramiden so ausdrücken, daß die Spitze immer zuerst genannt wird, und daher die, nach dem ersten folgenden Buchstaben die Basis bezeichnen. Legt man durch den W. b f d eine Ebene, so entsteht das △ b f d, daher die Pyramide f a b e d in zwei dreiseitige f a b d und f b e d zerfällt, und es ergibt sich a b c f d e = f a b c + f a b d + f b e d. Wird die Diagonale d c gezogen, so entsteht die Pyramide d a b c = c a b d, welche mit f a b d einerlei Basis a b d hat; die Höhen derselben sind die Senkrechten, welche von c und f auf die Ebene a b e d gezogen werden; allein da c f || a d, also nach §. 99. 2. c f || a b e d ist, so müssen jene Senkrechten gleich sein: folglich haben die genannten Pyramiden auch gleiche Höhen, sind daher gleich; also d a b c = c a b d = f a b d. Zieht man ferner die Diagonalen a e und c e, wodurch die Pyramide e a b c = c a b e entsteht, und vergleicht sie mit f b e d, so zeigt sich, daß die Grundebenen a b e und b e d derselben gleich sind; denn sie haben die gemeinschaftliche Grundseite b e und liegen zwischen denselben Parallelen b e und a d, sie haben aber auch gleiche Höhen, weil f c || a b e d ist; daher muß e a b c = c a b e = f b e d sein. Durch Substitution erhält man also a b c f d e = f a b c + d a b c + e a b c. Ist das abgekürzte Prisma ein gerades, so sind die Kanten f c, d a und e b die Höhen dieser drei Pyramiden, und es folgt daher

$$abcfde = \frac{\triangle abc}{3}(fc + ad + be).$$ Es wird also der Kubikinhalt gefunden, wenn man den dritten Theil der Basis mit der Summe der drei Kanten multiplizirt.

§. 113. **Eigenschaften des geraden Cylinders.** Der Cylinder ist ein Körper, welcher von zwei gleichen und parallelen Kreisebenen, und einer krummen Fläche, die von jeder durch die Mittelpunkte o und e (Fig. 143.) jener Kreise gelegten Ebene in geraden Linien geschnitten wird, begrenzt ist. Jene Kreise heißen Grundebenen, die Verbindungslinie o e ihrer Mittelpunkte heißt Achse, und jene krumme Fläche die Mantelfläche. Steht die Achse auf den Grundebenen senkrecht, so heißt der Cylinder ein gerader oder senkrechter, sonst aber ein schiefer. Hier ist nur von ersterem die Rede.

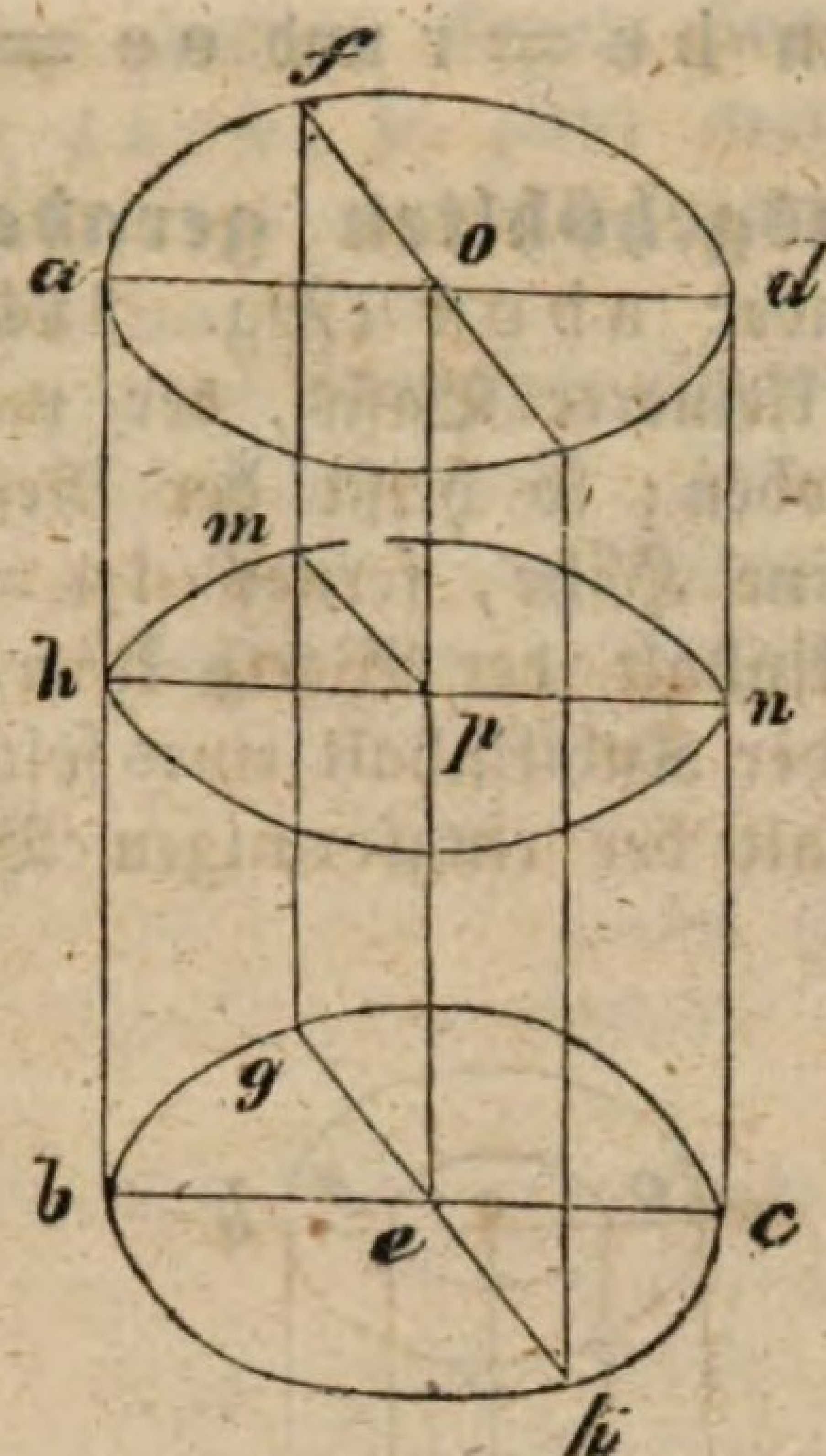


Fig. 143.

1) Die Seiten des Cylinders sind der Achse gleich und parallel; denn ist fg eine durch den Achsenschnitt fk erzeugte Seite, so muß of ∦ eg, daher auch fg ∦ oe sein.

2) Jeder auf die Achse senkrecht geführte Seitenschnitt ist ein der Basis gleicher Kreis, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt. Es sei hmn jener Schnitt, welcher die Achse in p trifft, so muß nach §. 101. die Ebene hmn || bgc sein. Zieht man ferner einen beliebigen Achsenschnitt fk, welcher die Ebenen hmn und bgc in den Geraden mp und ge schneidet, so ist mp || ge, und da auch gm || ep ist, so folgt eg = mp. Eben so wird auch bewiesen, daß hp = be und np = ec sei; da nun be = ge = ce ist, so muß auch hp = mp = np, somit hmn der früher genannte Kreis sein.

§. 114. Berechnung des geraden Cylinders.

1) Da sich der Kreis als ein unendlicheckiges reguläres Polygon betrachten läßt, so kann man den geraden Cylinder als ein unendlicheckiges gerades Prisma ansehen, und den Kubikinhalt desselben, wie im §. 108. 6. gezeigt wurde, berechnen. Es wird also der Kubikinhalt gefunden, wenn man den Flächeninhalt der Basis mit der Höhe multiplizirt. Ist nun be = r (Fig. 143.) und oe = h, so ergibt sich für den Kubikinhalt $r^2 \pi h$.

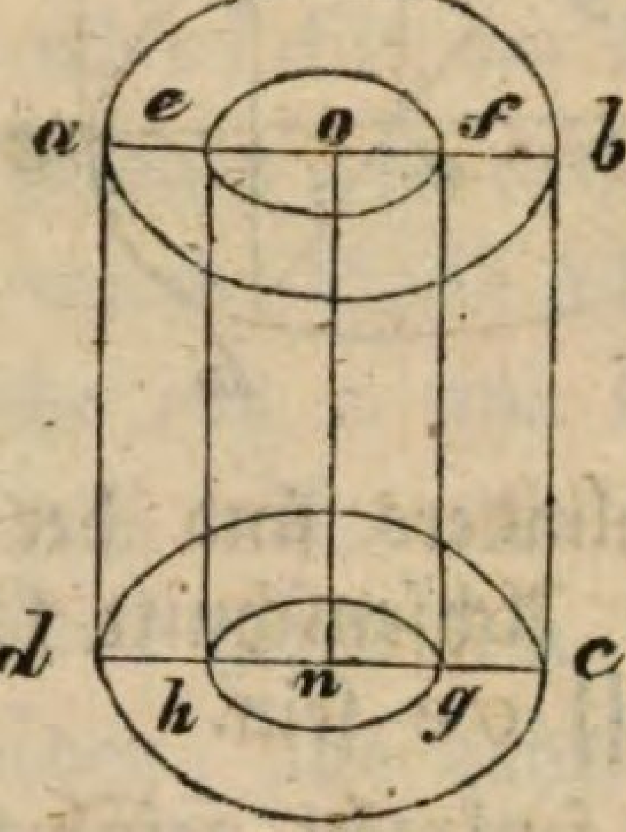
2) Sind B und b die Grundebenen, H und h die Höhen, ferner K und k die Kubikinhalte zweier gerader Cylinder, so folgt K : k = BH : bh. Alle im §. 108. 7. für Prismen entwickelten Sätze müssen daher auch hier ihre Anwendung finden.

3) Die Oberfläche O eines Cylinders besteht aus dessen Mantelfläche M und dem doppelten Flächeninhalte F der Basis, daher ist O = M + 2F. Da sich der gerade Cylinder als ein gerades Prisma betrachten läßt, so kann die Mantelfläche des erstern wie der Seiten-Flächeninhalt des letztern berechnet werden. Die Größe M wird also nach §. 108. 8. gefunden, wenn man den Umfang der Basis mit einer Seite oder der

Achse multiplizirt. Ist nun b e = r und o e = h, so hat man M = 2 r π h.

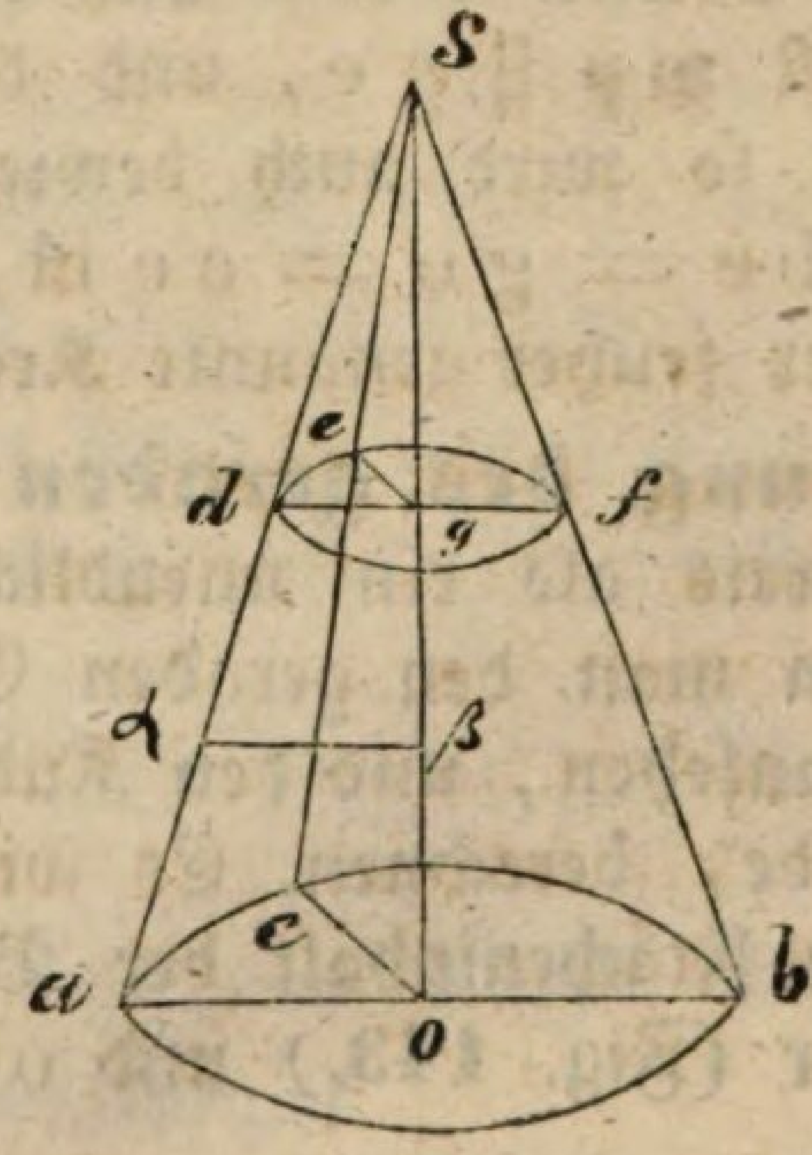
§. 115. **Vom ausgehöhlten geraden Cylinder.** Wird aus einem geraden Cylinder a b c d (Fig. 144.) ein anderer e f g h von derselben Höhe, aber kleinerer Basis, der mit dem frühern einerlei Achse o n hat, herausgehoben; so heißt der Rest ein ausgehöhlter gerader Cylinder. Ist h seine Höhe, ferner d n = R und h n = r, so ergibt sich für dessen Kubikinhalt der Werth $R^2 \pi h - r^2 \pi h = (R^2 \pi - r^2 \pi) h$. Es wird also der Kubikinhalt eines solchen Cylinders bestimmt, wenn man den Flächeninhalt der ringförmigen Basis $R^2 \pi - r^2 \pi$ mit seiner Höhe multiplizirt.

Fig. 144.



§. 116. **Eigenschaften des geraden Kegels.** Ein Körper s a c b (Fig. 145.), welcher von einer Kreisebene a c b als Basis und

Fig. 145.



einer so beschaffenen krummen Fläche begrenzt ist, daß jede Gerade s c, die durch einen außerhalb jener Basis liegenden Punkt s zum Umfang derselben gezogen wird, ganz in jener Fläche liegt, heißt Kegel. Jener Punkt s wird Spitze und jede Gerade s a, s c, s b der frühern Art wird Seite genannt; jene Gerade s o, welche die Spitze mit dem Centrum der Basis verbindet, heißt Achse des Kegels; die Senkrechte endlich, welche von der Spitze auf die Basis gefällt wird, ist die Höhe des Körpers. Steht die Achse auf der Basis senkrecht, so heißt der Kegel ein gerader, sonst ein schiefer. Hier wird nur ersterer näher besprochen.

1) Die Seiten des geraden Kegels sind gleich. Sind sa und sc zwei Seiten im Kegel $sacb$, so ziehe man die Radien ao und co, und nun folgt $ao = co$, $so = so$, ferner W. $aos = cos$, also $\triangle aos \cong cos$, daher $sa = sc$.

2) Der auf die Achse so senkrechte Seitenschnitt def ist ein Kreis, dessen Centrum g in der Achse liegt. Die Ebene $def \parallel acb$ legt man nun durch die W. aso und cso Ebenen, so entstehen die Schnitte dg und eg und es muß $dg \parallel ao$, ferner $eg \parallel co$, somit $\triangle dsg \sim aso$ und $\triangle esg \sim cso$ sein. Man hat also $ao : dg = so : sg = co : eg$, und da $ao = co$ ist, so folgt $dg = eg$. Eben so wird bewiesen, daß auch die andern Punkte der Linie def den obigen Abstand von g haben, der Schnitt ist also ein Kreis mit dem Centrum g.

§. 117. Berechnung des geraden Kegels.

1) Wird der Kegel mit der Pyramide verglichen, und die im §. 63. 1. entwickelte Vorstellung des Kreises beibehalten; so ergibt sich, daß dieser Körper als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet; daher dessen Kubikinhalt wie jener einer Pyramide berechnet werden könne. Um den gesuchten Inhalt zu finden, hat man also das Produkt aus der Grundebene und Höhe durch drei zu dividiren. Ist nun $ao = r$ und die Höhe $so = h$ (Fig. 145.), so folgt für den Kubikinhalt der Ausdruck $\frac{r^2 \pi h}{3}$

2) Sind K und k die Inhalte, B und b die Grundebenen, ferner H und h die Höhen zweier Kegel, so ergibt sich $K : k = BH : bh$. Die im §. 108. 7. für Prismen entwickelten Sätze gelten also auch für den Kegel.

3) Die Oberfläche O des Kegels besteht aus dem Flächeninhalte B der Basis und der Mantelfläche M desselben; daher hat man $O = B + M$. Da im geraden Kegel alle Seiten gleich sind, und die Basis als ein reguläres Unendlicheck betrachtet werden kann; so kann man den geraden Kegel als eine unendlicheckige gleichseitige Pyramide betrachten, daher dessen Mantelfläche wie den Seiten-Flächeninhalt S in §. 110. 5. berechnen; nur muß in der dießfalls entwickelten Regel, wie leicht einzusehen ist, statt der halben Höhe einer Seitenebene die halbe Seite des Kegels substituirt werden. Die Mantelfläche wird also gefunden, wenn man den Umfang der Basis mit der halben Seite des Kegels multiplizirt. Ist $sa = \alpha$ und $ao = R$, so folgt $M = 2 R \pi . \frac{\alpha}{2}$, oder $M =$ $M = R \pi \alpha$, daher $O = R^2 \pi + R \pi \alpha = R \pi (R + \alpha)$.

§. 118. Vom abgekürzten senkrechten Kegel.

1) Wird ein gerader Kegel $sacb$ (Fig. 145.) parallel mit der Basis geschnitten, so heißt das zwischen den parallelen Ebenen acb und def liegende Stück ein abgekürzter senkrechter Kegel. Dieser kann offenbar als eine unendlicheckige abgekürzte Pyramide betrachtet werden. Der Kubikinhalt eines solchen Körpers wird also nach §. 111. 1. berechnet. Bezeichnen die Größen B und b die untere und obere Grund-

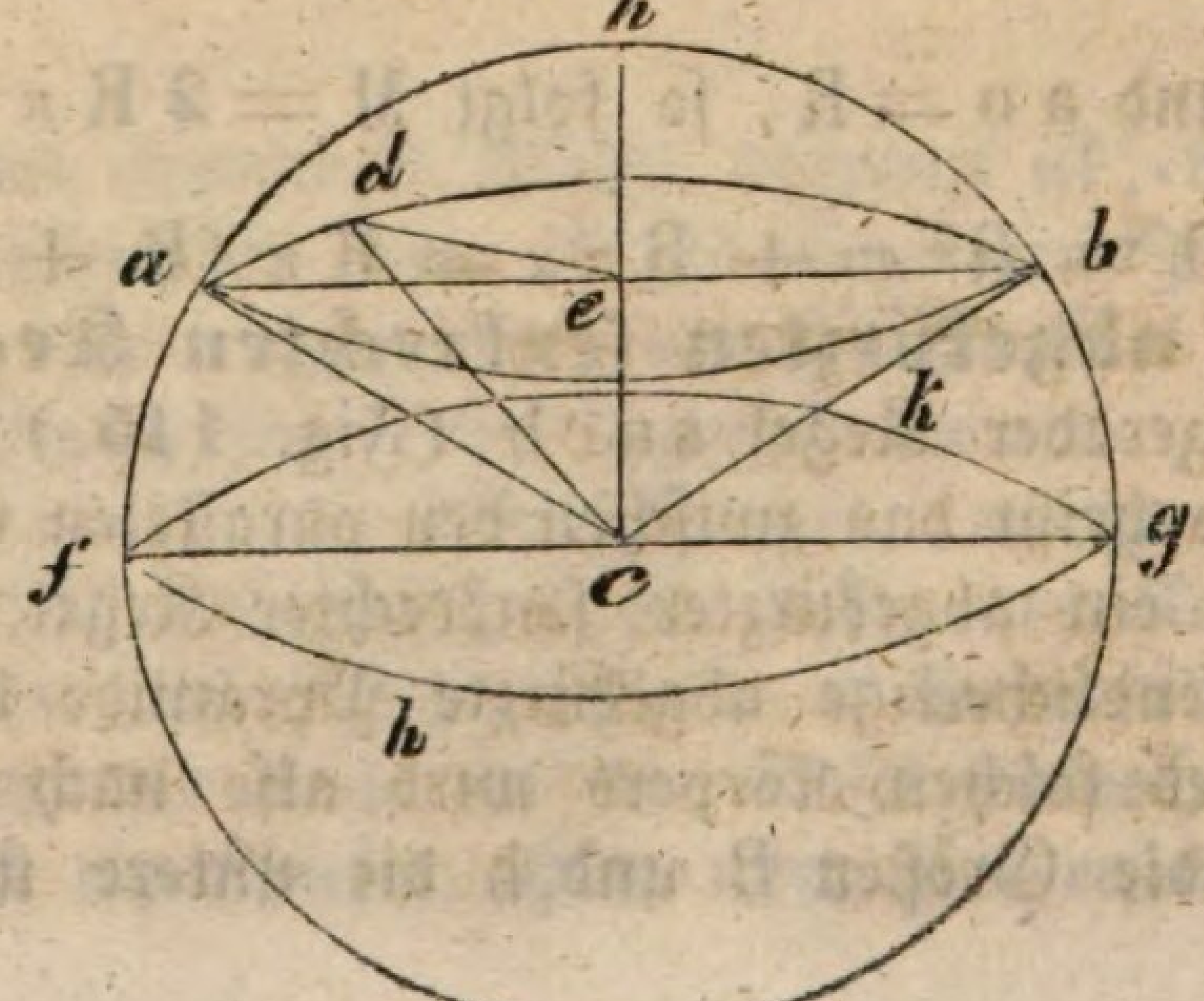
ebene des Körpers, und ist $og = h$ die Höhe desselben, so ergibt sich daher für den Kubikinhalt $K = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b)$. Wird nun $ao = R$ und $dg = r$ gesetzt, so ist $B = R^2\pi$ und $b = r^2\pi$ demnach $K = \frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

2) Die Oberfläche O eines abgekürzten senkrechten Kegels besteht aus den beiden Grundebenen B und b und der Mantelfläche M desselben; daher folgt $O = B + b + M$. Aber der abgekürzte senkrechte Kegel kann als eine unendlicheckige abgekürzte gleichseitige Pyramide betrachtet werden; folglich läßt sich die Größe M wie S in §. 111. 2. berechnen, wobei jedoch in jener Regel statt der halben Höhe einer Seitenebene die halbe Seite des Kegels zu setzen ist. Die Größe M wird also berechnet, wenn man den Umfang des durch die Mitte einer Seite zur Basis parallel geführten Schnittes mit einer Seite multiplizirt. Ist nun in acbg die Seite ad halbirt, also $a\alpha = d\alpha$, und in der Ebene adfb, $\alpha\beta \parallel ao$; so ist $\alpha\beta$ der Radius des durch jenen Schnitt erzeugten Kreises und dessen Umfang $2 . \alpha\beta . \pi$, folglich $M = 2 . \alpha\beta . \pi . ad$. Ist die Größe M durch die Radien R und r der Grundebenen und durch die Seite $ad = s$ auszudrücken; so bemerke man, daß nach §. 42. $\alpha\beta = \frac{ao + dg}{2} = \frac{R + r}{2}$, daher $R + r = 2 . \alpha\beta$ sei, und dann ergibt sich $M = (R + r)\pi . s$. Für die Oberfläche aber erhält man $O = R^2\pi + r^2\pi + \pi s(R + r)$.

§. 119. **Eigenschaften der Kugel**. Die Kugel ist ein Körper, der von einer einzigen krummen Fläche so begrenzt ist, daß alle Punkte derselben von einem innerhalb des geschlossenen Raumes liegenden Punkte gleich weit abstehen. Jener Punkt heißt Centrum, und jede Gerade, welche von diesem zur Oberfläche gezogen ist, wird Halbmesser genannt. In der Kugel sind also alle Halbmesser gleich. Die Gerade, welche zwei Punkte der Oberfläche verbindet, heißt Sehne; und die durch das Centrum gehende Sehne heißt Durchmesser. Jeder Durchmesser ist also so groß, wie der doppelte Halbmesser, und daher sind auch alle Durchmesser gleich.

1) Jeder ebene Kugelschnitt ist ein Kreis. Es sei adb (Fig. 146.)

Fig. 146.



ein solcher Schnitt, und c e die vom Centrum c der Kugel auf die Ebene desselben gefällte Senkrechte; man ziehe nun a e, d e und b e und die Radien a c, d c und b c, so zeigt sich a c = d c = b c, ferner W. a e c = d e c = b e c als Rechte, also ist △ a e c ≅ d e c ≅ b e c, daher a e = d e = b e. Die Punkte a, d und b liegen also in der Peripherie eines Kreises, dessen Centrum e und Radius a e ist; und dasselbe gilt von den übrigen Punkten der Durchschnittslinie der Ebene mit der Kugeloberfläche.

2) Um die weitern Eigenschaften jenes Schnittes kennen zu lernen, wollen wir den Kugelhalbmesser a c = R, den Radius des Schnittes a e = r und die Distanz desselben vom Centrum c e = d setzen; so folgt durch Anwendung des pythagorischen Lehrsatzes auf das △ a e c die Gleichung $r^2 = R^2 - d^2$ oder $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Da bei derselben Kugel R konstant ist, so wächst r, wenn d abnimmt, und erhält für d = o seinen größten Werth, nämlich $r = \sqrt{R^2} = R$. Der Kugelschnitt wird also größer, wenn die schneidende Ebene sich dem Centrum nähert; er wird ein größter Kreis, wenn der Schnitt durch das Centrum geht, und sein Halbmesser ist jenem der Kugel gleich. Für gleiche Werthe von d entsteht auch immer derselbe Werth von r; daher entsprechen gleichen Abständen vom Centrum auch gleiche Schnitte. Wenn d wächst, so nimmt r ab, und für d = R wird r = o. Die Durchschnittskreise werden also kleiner, wenn ihre Distanz vom Centrum zunimmt, und ist der Abstand dem Kugelhalbmesser gleich, so verschwindet jener Kreis; die schneidende Ebene hat also in diesem Falle mit der Kugeloberfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich, sie wird demnach eine tangirende Ebene, und steht auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht. Wird endlich d > R, so ist der Werth von r imaginär, in diesem Falle ist es also unmöglich, daß die Ebene die Kugel schneide.

3) Der durch das Centrum geführte Schnitt halbirt die Kugel. Es sei f g h k ein solcher Schnitt, so zerfällt dadurch die Kugel in zwei Segmente, welche von einem größten Kreise und einem Theile der Kugeloberfläche begrenzt werden. Denkt man sich nun den einen Theil so in den andern gestellt, daß jene größten Kreise, somit auch ihre Mittelpunkte zusammenfallen, so haben von diesem Punkte alle Punkte der krummen Oberfläche beider Segmente denselben Abstand; diese Oberflächen müssen sich also decken, daher jener Schnitt die Kugel und ihre Oberfläche halbirt.

§. 120. Berechnung der Kugel.

1) Die Oberfläche der Kugel wird gefunden, wenn man den Umfang eines größten Kreises mit dem Durchmesser multiplizirt. Trägt man dem Halbkreise a d b (Fig. 147.), dessen Centrum o ist, das größere Segment des nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilten Halbmessers als Sehne ein, so wird a d b nach §. 60. 3. in fünf gleiche Theile getheilt;

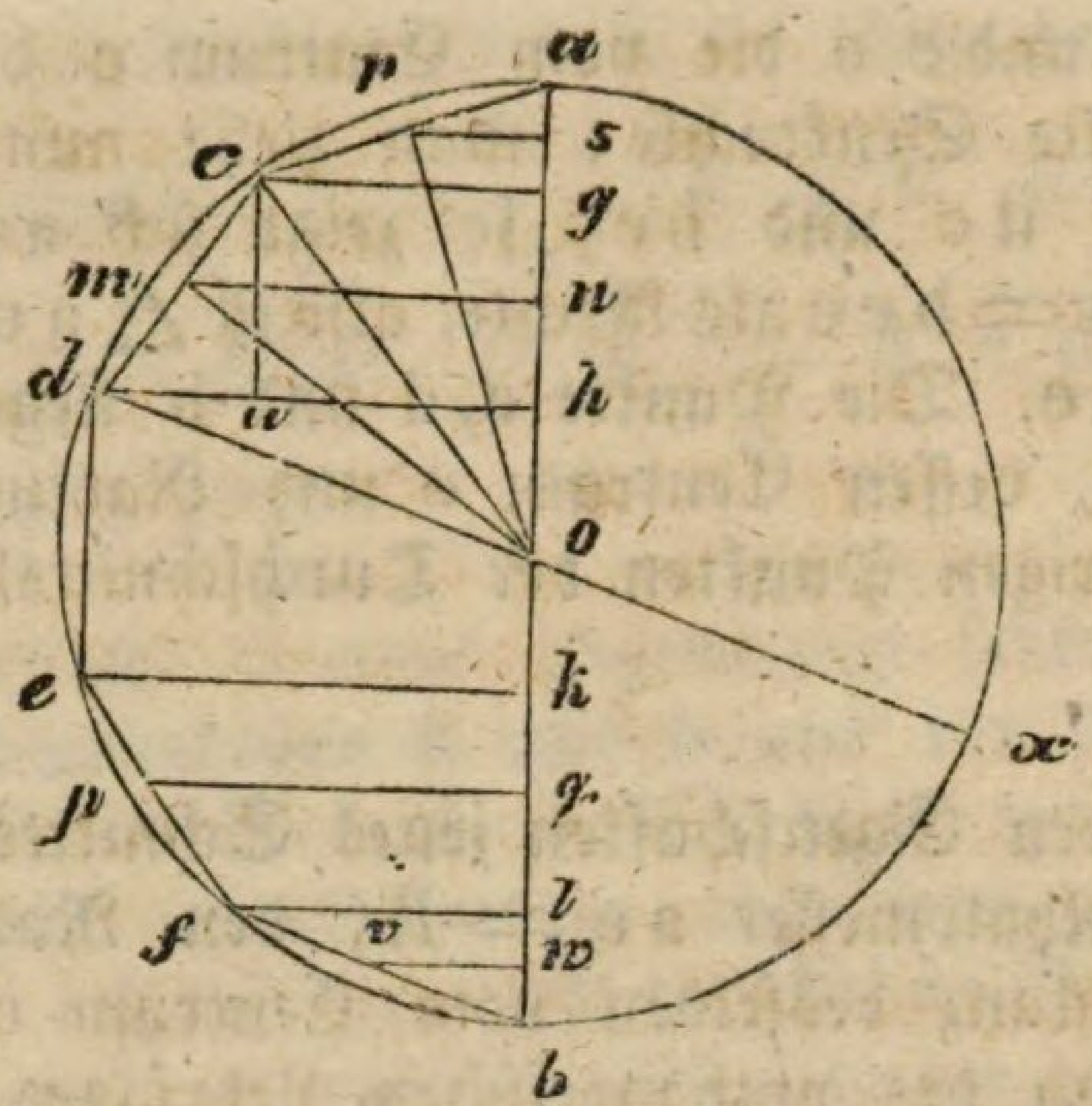


Fig. 147.

es sei daher $ac = cd = de = ef = fb$. Unter diesen Sehnen muß sich eine de vorfinden, die mit dem Durchmesser parallel ist. Denn zieht man den Radius do, so hat der Mittelpunkts-W. aod den Bogen ad zum Maße; es ist also W. $aod = \frac{2}{10} \cdot 360^0 = 72^0$. Dem Umfangs-W. edo aber entspricht als Maß die Hälfte des Bogens $ebx = eb + bx = eb + ad$, da wegen W. $box = aod$, auch $bx = ad$ ist. Also hat man W. $edo = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot 360^0 = 72^0$, daher W. $edo = aod$, somit $de \parallel ab$. Zieht man auf ab die Senkrechten cg, dh, ek fl, und denkt sich den Halbkreis adb um den Durchmesser ab als Achse gedreht, bis er seine ursprüngliche Lage erhält, so beschreibt er eine Kugel, deren Centrum o und Halbmesser ao ist; die Sehnen ac und bf erzeugen die Mantelflächen ganzer, dc und ef hingegen jene abgekürzter senkrechter Kegel, de endlich beschreibt die Seitenfläche eines geraden Cylinders. Macht man $ar = cr$, $cm = dm$, $ep = fp$, $fv = vb$, und zieht auf ab die Senkrechten rs, mn, pq und vw, so ergeben sich, wenn m_1, m_2, m_3, m_4 und m_5 die Mantelflächen der Körper, wie sie in der Ordnung von a nach b folgen, bezeichnen, die Ausdrücke $m_1 = 2\pi \cdot gc \cdot \frac{ac}{2} = 2\pi ac \cdot \frac{gc}{2} = 2\pi ac \cdot rs$, $m_2 = 2\pi mn \cdot dc$, $m_3 = 2\pi \cdot ek \cdot de = 2\pi\ ek \cdot hk$, $m_4 = 2\pi \cdot pq \cdot ef$, $m^5 = 2\pi \cdot fb \cdot vw$. Zieht man die Geraden ro und mo, ferner $cu \perp dh$, so folgt $or \perp ac$, $rs \perp ag$, $so \perp gc$, somit $\triangle rso \sim agc$, und auf ähnliche Art $\triangle dcu \sim mno$, also $ac : ag = ro : rs$, daher $ac \cdot rs = ag \cdot ro$ und $dc : cu = mo : mn$, folglich $dc \cdot mn = cu \cdot mo = gh \cdot ro$ Demnach ergibt sich $m_1 = 2\pi \cdot ag \cdot ro$ und $m_2 = 2\pi \cdot ro \cdot gh$, und auf ähnliche Weise auch $m_4 = 2\pi \cdot ro \cdot kl$ und $m_5 = 2\pi . ro \cdot bl$; endlich ist einleuchtend, daß $m_3 = 2\pi \cdot ro \cdot hk$ sei. Also hat man $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 2\pi . ro\ (ag + gh + hk + kl + lb) = 2\pi \cdot ro \cdot ab = 2\pi \cdot ro \cdot 2R = 2R\pi \cdot 2 \cdot ro$, wenn R den Kugelhalbmesser bezeichnet. Wird dem Halbkreise adb ein halbes reguläres Polygon von größerer Seitenzahl eingeschrieben, und dieselbe Rechnung ausgeführt, so erhält man dasselbe Resultat; nämlich das Produkt aus dem Umfange $2R\pi$ eines größten Kreises mit der dop-

pelten Senkrechten $2 \cdot ro$, welche vom Centrum auf eine Seite gezogen ist. Je größer die Seitenanzahl des dem Kreise eingeschriebenen regulären Polygons ist, desto mehr nähert sich die Summe $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ der Kugeloberfläche O, und wird erstere unendlich groß gedacht, so geht letztere in O selbst über, dann aber ist $r o = R$; somit hat man die Gleichung $O = 2 R \pi \cdot 2 R = 4 \cdot R^2 \pi$. Die Kugeloberfläche ist also auch dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises gleich.

2) Bezeichnen O und o zwei Kugeloberflächen, R und r die entsprechenden Radien, so hat man $O : o = 4 R^2 \pi : 4 r^2 \pi = R^2 : r^2$. Die Kugeloberflächen verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Radien.

3) Der Kubikinhalt einer Kugel wird gefunden, wenn man ihre Oberfläche mit dem dritten Theile des Halbmessers multiplizirt. Es sei a b (Fig. 148.) ein Durchmesser und o das Centrum der Kugel, ferner

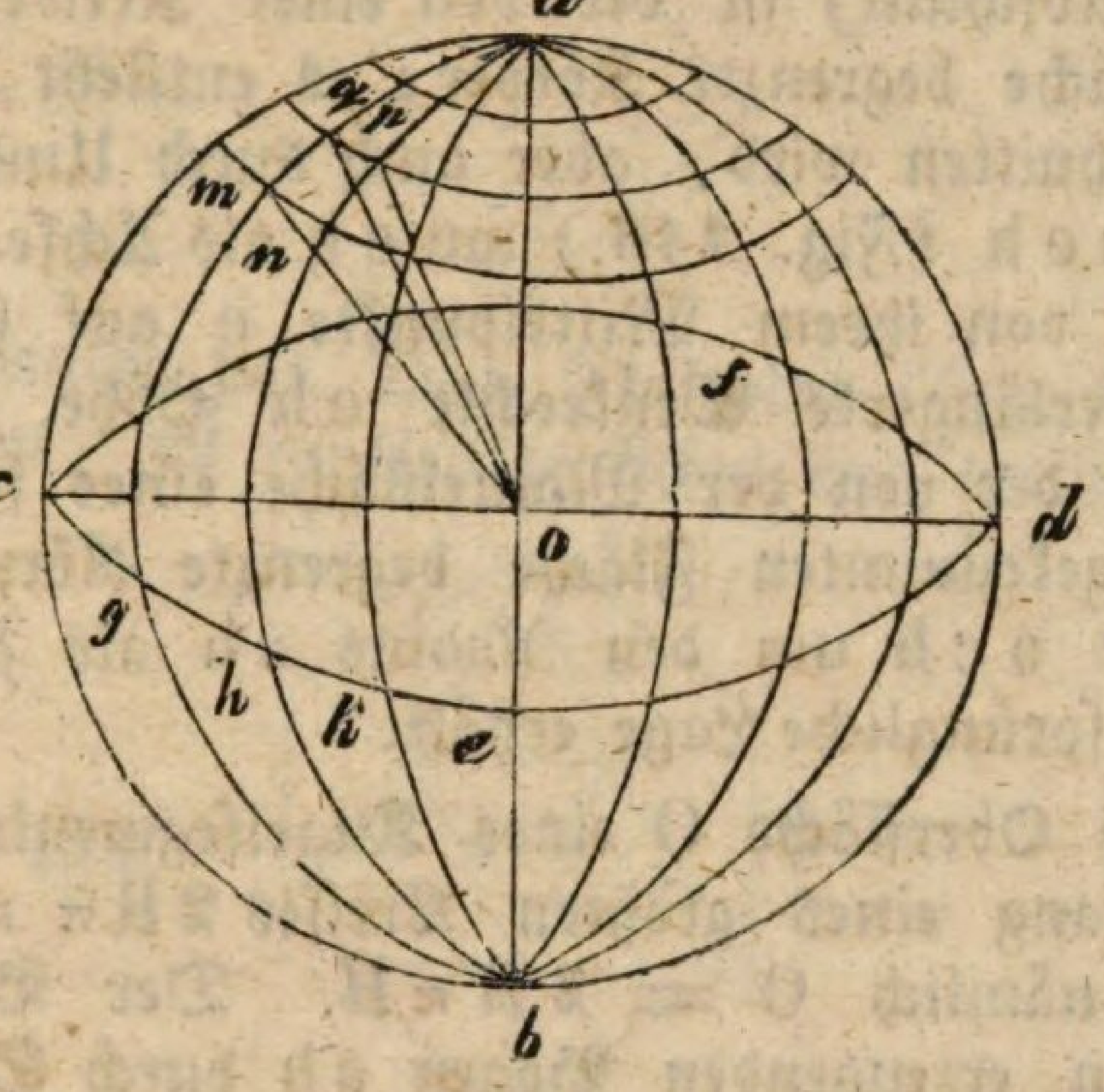


Fig. 148.

durch letzteres eine Ebene senkrecht auf a b gelegt; so entsteht ein größter Kreis c e d f. Denkt man sich nun den Halbkreis c e d in eine große Anzahl gleicher Theile c g, g h, h k ... getheilt, dann durch die Theilpunkte und a b Ebenen geführt, so wird die Oberfläche in eine große Anzahl sehr schmaler sphärischer Zweiecke, deren Spitzen die Endpunkte a und b jenes Durchmessers sind, getheilt. Wird nun die Kugel durch eine große Anzahl gleichmäßig vertheilter, auf a b senkrechter Schnitte noch ferner getheilt; so werden genannte Zweiecke in sehr kleine Dreiecke und Vierecke zerschnitten, in welche somit die ganze Kugeloberfläche zerfällt. Stellt man sich vor, die Anzahl Schnitte der einen und der andern Art sei unendlich groß, so werden jene Dreiecke und Vierecke unendlich klein, und können daher als ebene geradlinige Figuren betrachtet werden. Denkt man sich durch die Seiten jener Figuren und durch das Centrum Ebenen gelegt; so erscheint die Kugel als ein Aggregat drei und vierseitiger Pyramiden, deren Grundebenen in der Kugeloberfläche liegen, deren gemeinschaftliche Spitze o das Centrum und deren Höhe der Halbmesser der Kugel ist. Eine dieser Pyramiden wird durch o m n p q dargestellt. Bezeichnen b_1, b_2, b_3, ... jene Grundebenen, sind ferner R, O und k der Halbmesser, die Oberfläche

und der Kubikinhalt der Kugel, so hat man $K = b_1 \cdot \frac{R}{3} + b_2 \cdot \frac{R}{3} + b_3 \cdot \frac{R}{3} + \ldots = \frac{R}{3}(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) = \frac{R}{3} \cdot O$. Nun ist aber $O = 4 R^2 \pi$, folglich $K = \frac{4}{3} R^3 \pi$, oder, wenn D den Durchmesser bezeichnet, also $R = \frac{D}{2}$ ist $K = \frac{D^3 \pi}{6}$

4) Sind K und k die Kubikinhalte zweier Kugeln, dann R und r ihre Radien, so folgt $K : k = \frac{4}{3} R^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi = R^3 : r^3$. Die Kubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich also wie die dritten Potenzen ihrer Radien.

§. 121. **Berechnung des Kugelsegments und Sektors.** Ein Kugelsegment (Abschnitt) ist der von einer Kreisebene und kugelartig gekrümmten Fläche begrenzte Körper; es entsteht, wenn die Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, aber auch durch Umdrehung des halben Kreissegmentes a e h (Fig. 146.) um e h als Achse. Die Kreisebene heißt Basis, und die von ihrem Mittelpunkte e auf sie gezogene und bis zur Oberfläche verlängerte Senkrechte e h Höhe. Ein Kugelsektor (Ausschnitt) aber ist der von der Mantelfläche eines senkrechten Kegels und einer kugelartig gekrümmten Fläche begrenzte Körper. Er entsteht, wenn der Kreissektor a c h um den Radius c h als Achse sich herumdreht, bis er seine ursprüngliche Lage erhält.

1) Die krumme Oberfläche O eines Kugelsegments wird gefunden, wenn man den Umfang eines größten Kreises $2 R \pi$ mit der Höhe H multiplizirt; es ist nämlich $O = 2 R \pi H$. Der Beweis wird geführt, indem man den erzeugenden Bogen a h durch Sehnen in gleiche Theile theilt, und übrigens wie in §. 120. 1. verfährt.

2) Die Oberfläche eines Kugelsektors c a d b h wird gefunden, wenn man die Mantelfläche des senkrechten Kegels c a d b und die krumme Oberfläche des Kugelsegments a d b h berechnet und die Resultate summirt.

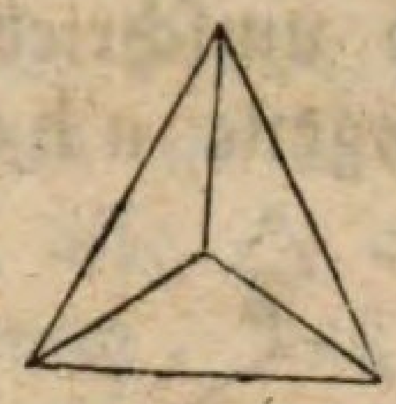
3) Der Kubikinhalt eines Kugelsektors c a d b h wird gefunden, wenn man die krumme Oberfläche des demselben entsprechenden Segments a d b h mit dem dritten Theile des Kugelhalbmessers multiplizirt. Ist nämlich $h e = H$ die Höhe jenes Segments und $c h = R$ der Kugelhalbmesser, so hat man $2 R \pi H \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3} R^2 \pi H$. Der Beweis läßt sich wie im §. 120. 3. ausführen.

4) Der Kubikinhalt des Kugelsegments a d b h endlich wird berechnet, wenn man vom Inhalte des Sektors c a d b h jenen des senkrechten Kegels c a d b abzieht.

§. 122. **Eigenschaften der regulären Körper.** Ein von Ebenen begrenzter Körper (Polyeder), dessen Oberfläche aus lauter kongruenten regulären Polygonen besteht, und der kongruente Ecken besitzt, heißt regulär.

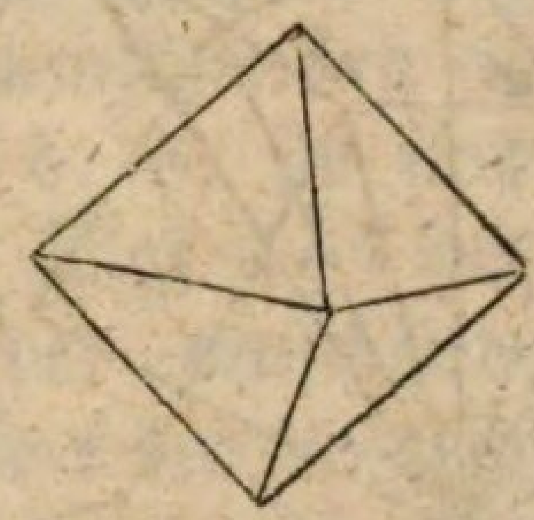
1) Die einfachste reguläre Figur ist das gleichseitige Dreieck, und in diesem ist jeder Winkel 60°; da nun nach §. 104. 4. die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke immer kleiner als 360° sein muß: so kann man aus regulären Dreiecken nur drei-, vier- und fünfseitige Ecken, nicht aber mehrseitige bilden. Daher gibt es auch nur drei von gleichseitigen Dreiecken begrenzte reguläre Körper. Das Tetraeder (Fig. 149),

Fig. 149.



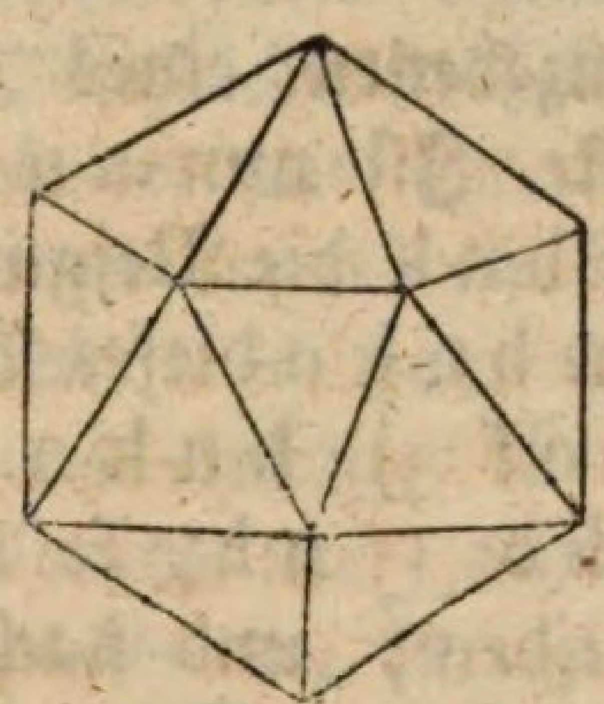
welches vier Grenzebenen, vier dreiseitige Ecken und sechs Kanten besitzt. Das Oktaeder (Fig. 150.), welches acht Grenzebenen, sechs vierseitige

Fig. 150.



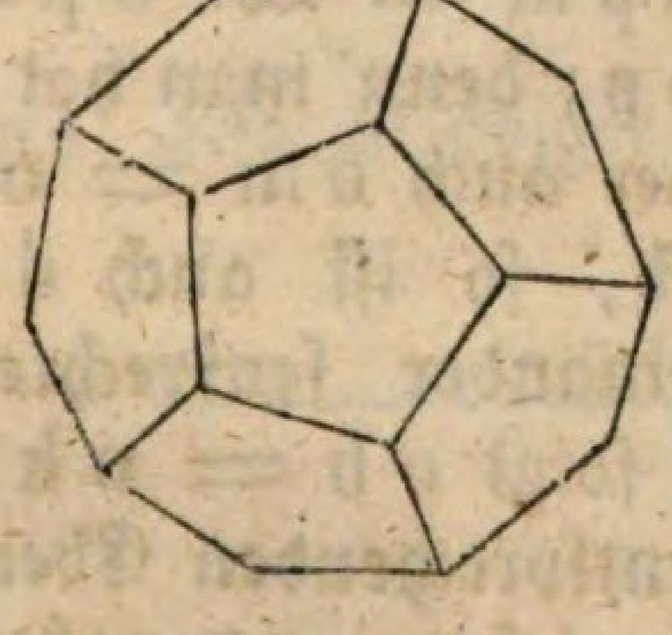
Ecken und zwölf Kanten hat. Das Ikosaeder (Fig. 151.), in welchem zwanzig Grenzebenen, 12 fünfseitige Ecken und dreißig Kanten vorkommen.

Fig. 151.



men. Die nächste reguläre Figur ist das Quadrat, in diesem hat jeder Winkel 90°; daher aus Quadraten nur eine dreiseitige Ecke gebildet werden kann. Es gibt also auch nur einen von Quadraten begrenzten regulären Körper, nämlich den Würfel (das Hexaeder), welcher sechs Grenzebenen, acht dreiseitige Ecken und zwölf Kanten besitzt. Da im regulären Fünfecke jeder Winkel 180° ist, so kann aus solchen Polygonen nur eine dreiseitige Ecke zusammengesetzt werden; somit gibt es bloß einen von solchen Polygonen gebildeten regulären Körper. Er ist das Dodekaeder (Fig. 152.), welches zwölf Grenzebenen, zwanzig dreiseitige

Fig. 152.

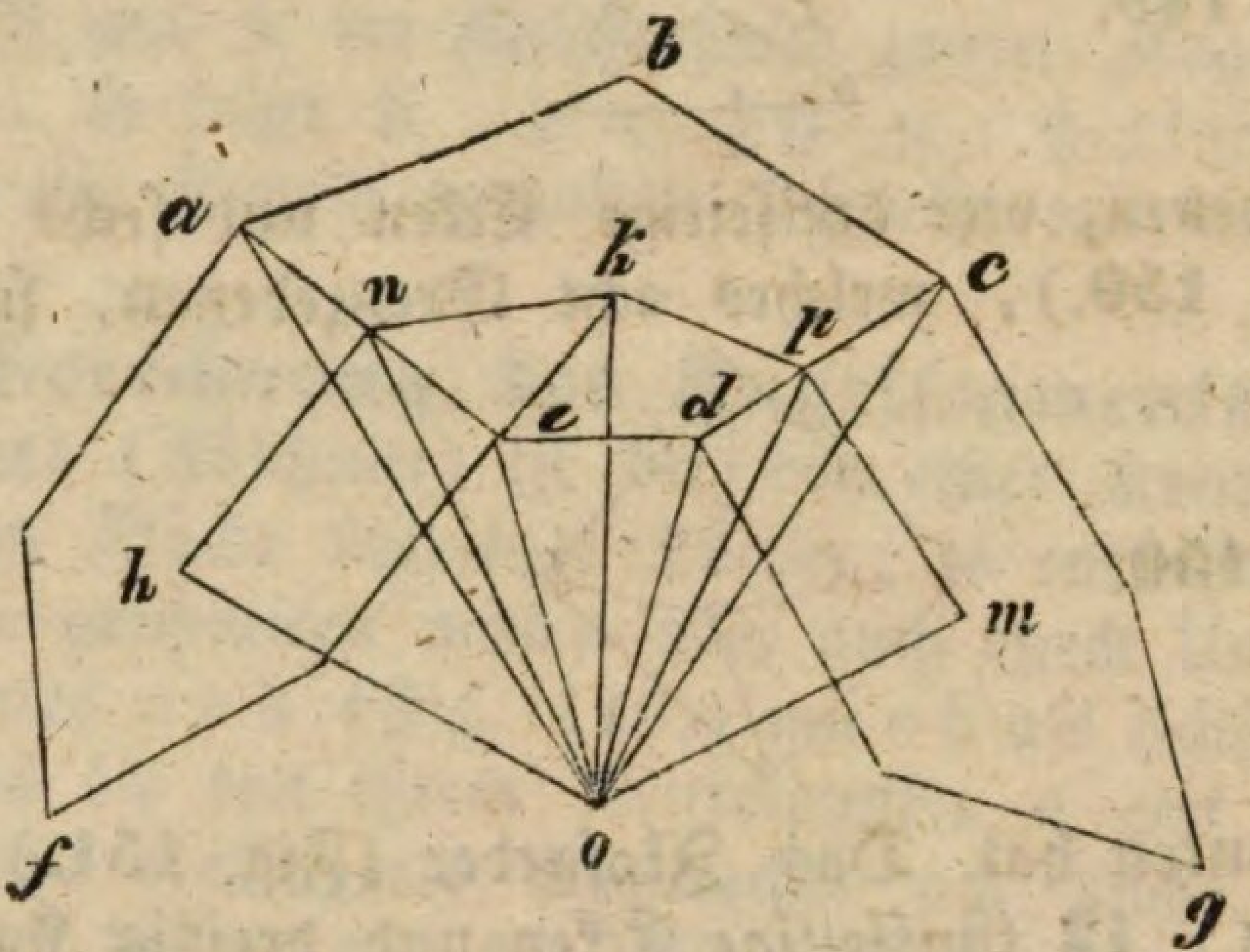


Ecken und dreißig Kanten besitzt. Im regulären Sechsecke ist jeder Winkel 120°, und in einer mehrseitigen regulären Figur ist jeder Winkel noch größer; somit kann aus regulären Polygonen, die mehr als fünf

Seiten haben, gar keine Ecke gebildet werden; daher es auch weiterhin keine regulären Körper gibt.

2) Berührt eine Kugel sämmtliche Grenzebenen eines Körpers, so sagt man jene Kugel sei dem Körper eingeschrieben; geht aber die Oberfläche einer Kugel durch die Spitzen aller Ecken eines Körpers, so ist die Kugel dem Körper umschrieben. Jedem regulären Körper kann eine Kugel eingeschrieben und umschrieben werden. Es seien die kongruenten und regulären Polygone a b d, a e f und d c g (Fig. 153.)

Fig. 153.



drei aneinanderstoßende Grenzebenen eines regulären Körpers, ferner k, h und m ihre Mittelpunkte. Ist nun a n = e n, so folgt n k $\perp$ a e und n h $\perp$ a e, also ist W. h n k die Neigung der Ebenen a b d und a e f und a e senkrecht auf der Ebene h n k o dieses Winkels; also nach §. 100. 1. auch a b d $\perp$ h n k o und a e f $\perp$ h n k o. Zieht man in der Ebene h n k o, k o $\perp$ n k, ferner h o $\perp$ n h, so müssen nach §. 23. 8. die Geraden k o und h o sich schneiden, und nach §. 100. 2. auf den Ebenen a b d und a e c senkrecht stehen. Wird die Gerade n o gezogen, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke h n o und k n o, welche wegen n h = n k, und n o = n o kongruent sind; woraus h o = k o und W. h n o = k n o folgt. Nun sei k p $\perp$ d c, also d p = p c und die Gerade p o gezogen, so ist k o = k o, und n k = p k, also $\triangle$ n k o $\cong$ p k o, daher n o = p o und W. o n k = o p k; aber es ist W. o n k = $\frac{1}{2}$ W. h n k, folglich auch W. o p k = $\frac{1}{2}$ W. h n k. Zieht man m p, so ist m p $\perp$ d c; daher W. k p m die Neigung der Ebenen a b d und c d g; aber im regulären Körper müssen je zwei zusammenstoßende Grenzebenen gleiche Neigung haben; somit ist W. k p m = h n k, folglich W. o p k = $\frac{1}{2}$ W. k p m = W. o p m. Wird endlich o m gezogen, so ist $\triangle$ o k p $\cong$ o m p; denn man hat p k = p m, o p = o p und W. o p k = o p m, daher auch o m = o k und W. o m p = o k p = R. Da d c $\perp$ k p m o ist, so ist auch d c g $\perp$ k p m o, also p m der Durchschnitt zweier aufeinander senkrechter Ebenen, folglich muß m o $\perp$ d c g sein. Hieraus folgt o h = o k = o m, und diese Geraden stehen auf den ihnen entsprechenden Ebenen a e f, a b d und d c g senkrecht. Da nun eben so bewiesen werden kann, daß die von den Mittelpunkten der übrigen Grenzebenen zu o gezogenen Geraden gleich o h und auf den ihnen zugehörigen Ebenen senkrecht sind; so muß die Ku-

gel, deren Centrum o und Radius oh ist, alle Grenzebenen und zwar in ihren Mittelpunkten berühren. Auch geht hieraus hervor, wie das Centrum und der Halbmesser der dem Körper eingeschriebenen Kugel gefunden werden könne. Jedem regulären Körper kann aber auch eine Kugel umschrieben werden. Vermöge des Vorhergehenden ist $ae \perp hnko$, daher W. $ano = eno = R$, und da auch $an = en$, ferner $no = no$ ist, so folgt $\triangle ano \cong eno$, somit $ao = eo$, und eben so zeigt sich auch $co = do$. Nun ist aber auch $ne = pd$, $no = po$ und W. $eno = dpo = R$, also $\triangle eno \cong dpo$, daher $eo = do = ao = co$. Eben so findet man, daß die Geraden, welche die Spitzen der übrigen Ecken mit o verbinden, die Größe eo haben; also liegen die Spitzen aller Ecken in der Oberfläche einer Kugel, deren Centrum o und Radius eo ist. Jedem regulären Körper kann also eine Kugel eingeschrieben und umschrieben werden, und zwar haben beide Kugeln dasselbe Centrum, d. h. sie sind konzentrisch.

3) Aus dem $\triangle oke$ folgt $oe^2 = ok^2 + ek^2$, es ist also das Quadrat des Halbmessers der umschriebenen Kugel gleich der Summe der Quadrate des Halbmessers der eingeschriebenen und jenem des Halbmessers des einer Grenzebene umschriebenen Kreises.

§. 123. Berechnung der regulären Körper.

1) Da die Grenzebenen eines regulären Körpers kongruente Figuren sind, so wird die Oberfläche desselben berechnet, wenn man den Flächeninhalt einer Grenzebene mit der Anzahl aller multiplizirt.

2) Der Kubikinhalt eines regulären Körpers wird berechnet, wenn man die Oberfläche desselben mit dem dritten Theile des Halbmessers der eingeschriebenen Kugel multiplizirt. Es sei o (Fig. 153.) der Mittelpunkt eines regulären Körpers und abd eine Grenzebene desselben; verbindet man nun die Punkte a, b, c, d, e mit o, und legt durch die bei o entstehenden Winkel Ebenen, so ergibt sich eine gleichseitige Pyramide, deren Basis abd, Spitze o und deren Höhe die von o zum Mittelpunkte k der regulären Grundebene gezogene Gerade ok ist; sie hat also den Radius der dem Körper eingeschriebenen Kugel zur Höhe. Der Kubikinhalt dieser Pyramide ist also $\frac{1}{3}$ ko . abd. Auf die beschriebene Art kann man aber den ganzen Körper in eben so viele gleichseitige Pyramiden, als Grenzebenen vorhanden sind, zerlegen; und diese sind alle gleich, indem sie gleiche Grundebenen und Höhen haben. Ist nun n die Anzahl der Grenzebenen, so folgt für den Kubikinhalt des regulären Körpers der Ausdruck $n \cdot abd \cdot \frac{ko}{3}$; aber es ist $n \cdot abd$ die Oberfläche des Körpers, also ist obiger Lehrsatz erwiesen.

Ein allgemeines Gesetz der Dreieckseiten.

Der an Realschulen und Gymnasien, vorzugsweise in der oberen Abtheilung derselben zu realisirende Zweck des mathematischen Studiums besteht nicht nur darin, eine genaue Kenntniß des Zusammenhangs der wichtigsten zur Elementar-Mathematik gehörigen Lehren zu erzielen, und diese dann zur Auflösung allgemeiner und besonderer Probleme anzuwenden, um hierdurch volle Gewandtheit in der Ausführung aller Rechnungsoperationen zu erlangen; sondern auch die Fähigkeit der Schüler heranzubilden, Beweise und Auflösungen, die sich auf einfache Kombinationen früher entwickelter Lehren gründen, ohne Schwierigkeit selbst auffinden zu können.

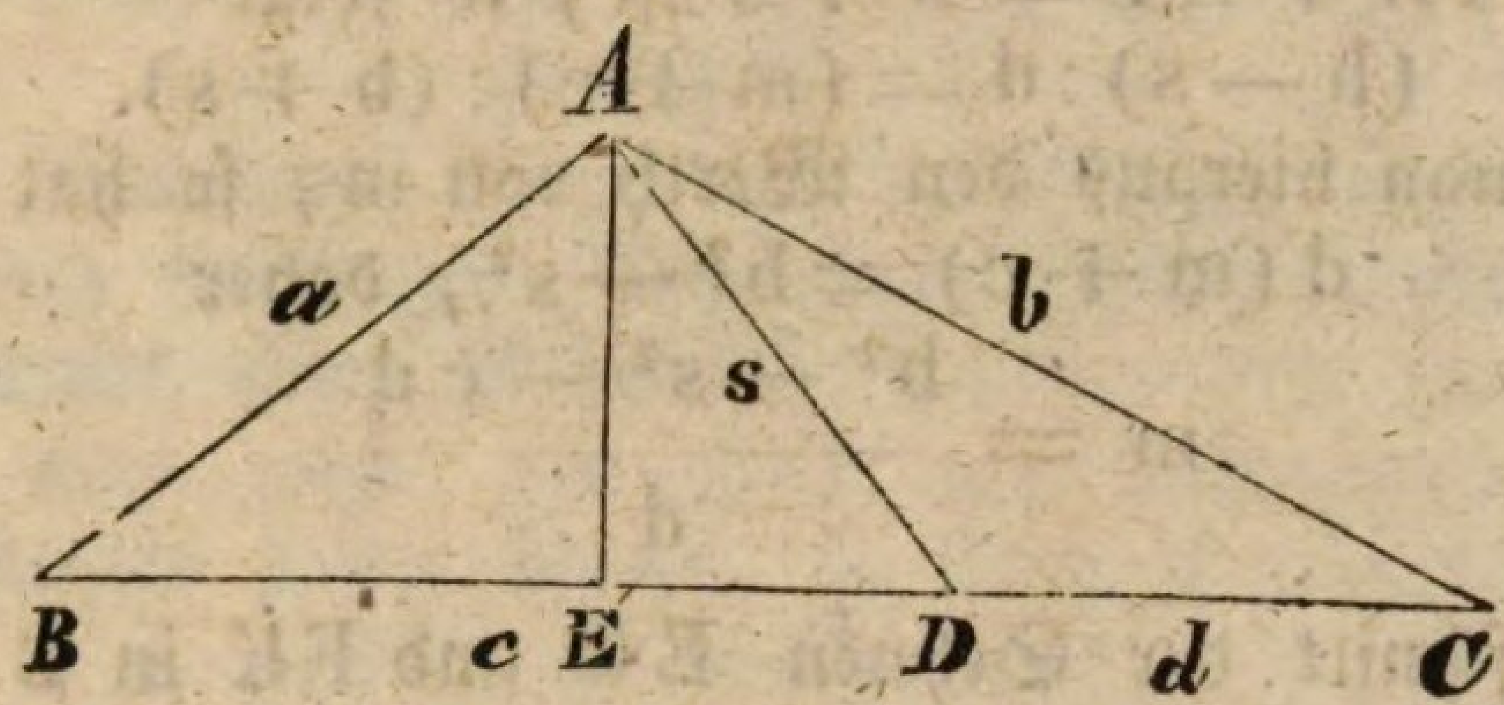
Zur Erreichung des letztgenannten Zweckes ist die Sokratische Lehrmethode vorzugsweise geeignet, indem sie das Denken besonders anregt, die Verstandeskräfte rascher entwickelt und instruktiver als jede andere Lehrart wirkt. Diese Lehrmethode, die das Vergnügen des Selbstfindens gewährt, und das für den günstigen Erfolg des Unterrichts so wichtige Selbstvertrauen erzeugt, ist zwar besonders beim Privatunterrichte anwendbar; aber die Vortheile derselben lassen sich größtentheils auch im öffentlichen erzielen, wenn der Lehrer die Aufmerksamkeit seiner Schüler stets zu fesseln weiß. Dieses dürfte bei gehörigen Vorkenntnissen, welche die Schüler bereits besitzen, kaum mißlingen, wenn der Lehrer einen deutlichen und lebhaften Vortrag entwickelt; die wo möglich dem Erfahrungskreise der Schüler entnommenen Beispiele so wählt, daß sie stufenweise wachsende Schwierigkeiten darbieten, und bei der Demonstration einzelner Lehren, durch Hinweisung auf deren Anwendung in den verschiedenen Theilen der Naturwissenschaft, Interesse für den Gegenstand hervorruft; ferner wenn er den in Gegenwart sämmtlicher Schüler mit einem derselben auf genannte Weise vorgenommenen Unterricht mit einem anderen sogleich wiederholt, und die allenfalls wegen mangelhafter Aufmerksamkeit sich ergebenden Lücken in der Auffassung mit gewissenhafter Strenge rügt und bei der Klassifikation berücksichtigt.

Ein nicht unbedeutendes Moment zur Erreichung jenes Zieles besteht auch darin, daß den Schülern die Anleitung werde, wie man von allgemeinen Beziehungen ausgehend, ein allgemeines Gesetz auffindet und aus denselben spezielle Lehren ableitet; wodurch sich ihre Erkenntniß zu einer höheren Einheit des Wissens gestalten muß. Hierdurch erhält der Forschungsgeist neue Nahrung, ihre Denkkraft wird mächtig angeregt, und indem sie einen höheren Grad der Einsicht erlangen, steigert sich auch ihr Interesse für die Wissenschaft.

Um in diesem Sinne zu wirken, und zur intellektuellen Entwicklung der Jugend auf letztgenannte Weise etwas beizutragen, dürfte folgende mathematische Abhandlung, welche ein neues allgemeines Gesetz der Dreieckseiten sammt einigen speziellen Fällen und Anwendungen desselben darstellt, vielleicht nicht unwillkommen erscheinen.

Entwicklung des allgemeinen Gesetzes.

Fig. 154.



Wird in einem Dreiecke ABC vom Scheitel A eines Winkels zu einem beliebigen Punkte D der gegenüberliegenden Seite BC eine Gerade AD gezogen, so findet, wenn man

$AB = a$, $AC = b$, $BD = c$, $DC = d$ und $AD = s$

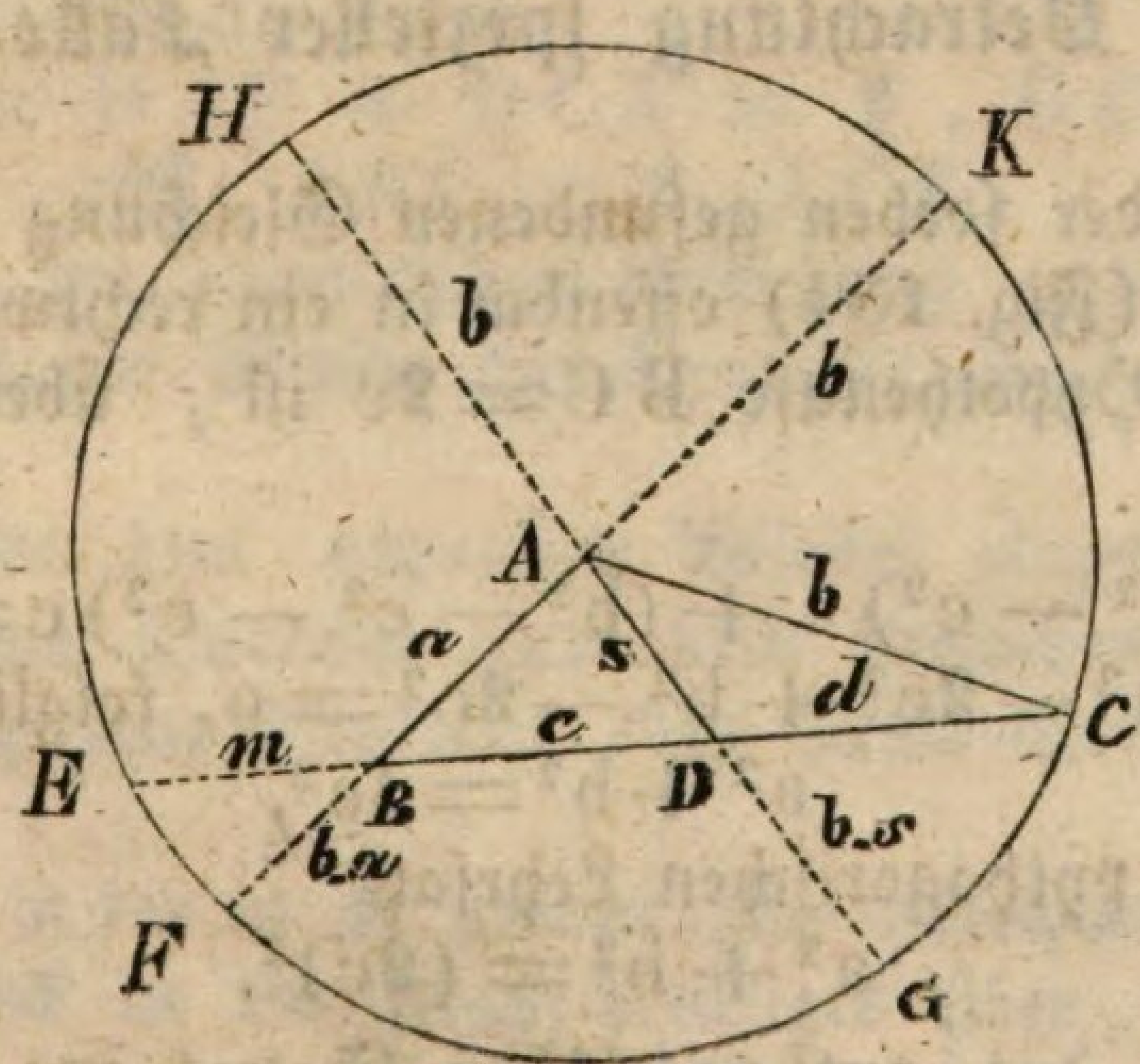
setzt, folgende Gleichung statt:

$$(a^2 - c^2 - s^2)\, d + (b^2 - d^2 - s^2)\, c = 0.$$

Der durch diese Gleichung ausgesprochene allgemeine Lehrsatz läßt sich auf verschiedene, sehr einfache Arten rechtfertigen; da wir jedoch beabsichtigen, aus demselben in der Folge das pythagorische Theorem abzuleiten; so muß offenbar eine, von diesem ganz unabhängige Beweisführung gewählt werden. Die bekannte Eigenschaft der Segmente zweier sich schneidender Kreissehnen bietet uns hierzu ein sehr einfaches Mittel dar.

Es sei in dem wie früher bezeichneten Dreiecke ABC (Fig. 155.) $AC > AB$, dann mit dem Centrum A und Radius AC ein Kreis beschrieben; so wird das genannte Dreieck ganz innerhalb desselben liegen

Fig. 155.



müssen. Verlängert man nun AB und AD, so daß die Durchmesser FK und HG entstehen, so ergibt sich

$$BF = AF - AB = b - a \text{ und}$$

$$DG = AG - AD = b - s,$$

und setzt man $BE = m$, so folgt noch

$$DE = BE + BD = m + c.$$

Rücksichtlich der im Punkte D sich schneidenden Sehnen HG und CE erhält man bekanntlich die Proportion

$$DG : DC = ED : HD;$$

da nun $HD = AH + AD = b + s$ ist, so folgt

$$(b - s) : d = (m + c) : (b + s).$$

Bestimmt man hieraus den Werth von m, so hat man

$$d (m + c) = b^2 - s^2, \text{ daher}$$

$$m = \frac{b^2 - s^2 - c d}{d}$$

Der Durchschnitt der Sehnen EC und FK in B gibt auf gleiche Weise die Proportion

$$BF : BE = BC : BK \text{ oder}$$

$$(b - a) : m = (c + d) : (b + a), \text{ woraus}$$

$$m = \frac{b^2 - a^2}{c + d} \text{ folgt.}$$

Durch Gleichsetzung der beiden für m gefundenen Werthe erhält man nun

$$\frac{b^2 - a^2}{c + d} = \frac{b^2 - s^2 - c d}{d}$$

Wird diese Gleichung von Brüchen befreit, so ergibt sich

$$(b^2 - a^2) d = (b^2 - s^2 - c d) (c + d),$$

und hieraus findet man nach Entwicklung der angezeigten Produkte und gehöriger Reduktion die früher aufgestellte Gleichung:

$$(a^2 - c^2 - s^2) d + (b^2 - d^2 - s^2) c = o.$$

Betrachtung spezieller Fälle.

1) Es sei in der soeben gefundenen Gleichung $d = s = c$, so geht das Dreieck ABC (Fig. 154) offenbar in ein rechtwinkliges, dessen rechter Winkel BAC und Hypothenuse $BC = 2c$ ist, über; und man erhält durch Substitution

$$(a^2 - c^2 - c^2) c + (b^2 - c^2 - c^2) c = o \text{ oder}$$

$$a^2 - 2c^2 + b^2 - 2c^2 = o, \text{ folglich}$$

$$a^2 + b^2 = 4c^2,$$

somit hat man den pythagorischen Lehrsatz

$$a^2 + b^2 = (2c)^2.$$

Die Ableitung des pythagorischen Satzes aus dem neuen Theorem läßt sich aber auch sehr einfach auf folgende Art ausführen.

Ist im Dreiecke ABC (Fig. 154.) $b = a$ und $d = c$, so wird AD senkrecht auf BC, somit ABD ein in D rechtwinkliges Dreieck, und die allgemeine Gleichung gibt:

$$(a^2 - c^2 - s^2) c + (a^2 - c^2 - s^2) c = o, \text{ also}$$
$$2c (a^2 - c^2 - s^2) = o, \text{ daher}$$
$$a^2 - c^2 - s^2 = o, \text{ demnach}$$
$$a^2 = c^2 + s^2.$$

2) Setzt man in der erwiesenen allgemeinen Gleichung $b = a$, so folgt:

$$(a^2 - c^2 - s^2) d + (a^2 - d^2 - s^2) c = o \text{ oder}$$
$$s^2 (d + c) = a^2 (d + c) - d c (d + c), \text{ demnach}$$
$$s^2 = a^2 - d c.$$

D. h. das Quadrat der, von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks zu einem beliebigen Punkte der Basis gezogenen Geraden ist gleich dem Quadrate eines Schenkels, weniger dem Produkte der beiden Basissegmente; was auch mit Hilfe des pythagorischen Satzes folgt. Halbirt jene Gerade s die Basis, so wird $d = c$ und man hat wie bekannt $s^2 = a^2 - c^2$.

3) Wird in der aufgestellten allgemeinen Gleichung

$$(a^2 - c^2 - s^2) d + (b^2 - d^2 - s^2) c = o$$

$d = c$ angenommen, so folgt:

$$(a^2 - c^2 - s^2) c + (b^2 - c^2 - s^2) c = o \text{ oder}$$
$$a^2 - c^2 - s^2 + b^2 - c^2 - s^2 = o, \text{ demnach}$$
$$a^2 + b^2 = 2 (s^2 + c^2).$$

Diese Gleichung stellt einen bekannten geometrischen Lehrsatz dar, welcher in den Lehrbüchern aus anderen Gründen bewiesen wird. Setzt man $b = a$, so ist $a^2 = c^2 + s^2$ wie in 1.

4) Wird vorausgesetzt, daß im Dreiecke ABC (Fig. 154) $d = s = a$, und $c + d = c + a = g$, also $c = g - a$ sei, so gibt die allgemeine Gleichung:

$$[a^2 - (g - a)^2 - a^2] a + (b^2 - a^2 - a^2) (g - a) = o, \text{ oder}$$
$$(b^2 - 2a^2) (g - a) - a (g - a)^2 = o, \text{ also}$$
$$b^2 - 2a^2 - a (g - a) = o, \text{ demnach}$$
$$b^2 - a^2 = ag.$$

Nun ist aber, jenen Voraussetzungen gemäß, der Winkel ABD = ADB und DAC = DCA, daher

$$ABD = DAC + DCA = 2 . DCA \text{ oder}$$
$$W. ABC = 2 . ACB;$$

also findet vermöge der entwickelten Gleichung unter den Seiten eines Dreiecks, in welchem ein Winkel das Doppelte eines andern ist, folgende Relation statt:

Das Quadrat der dem doppelten Winkel gegenüberliegenden Seite b^2 vermindert um das Quadrat jener dem einfachen Winkel gegenüberliegenden a^2 ist gleich dem Produkte eben dieser Seite a und der dritten Dreieckseite g.

5) Setzt man in der in 4. gefundenen Gleichung $g = b$, so geht das dießfällige Dreieck in ein gleichschenkliges über, dessen Basiswinkel ABC das Doppelte jenes ACB an der Spitze ist, und es ergibt sich für die Seiten desselben die schon bekannte Relation

$$b^2 - a b - a^2 = o.$$

6) Wird endlich in der in 4. entwickelten Gleichung

$$b^2 - a^2 = a g$$

$g = a$ gesetzt, so folgt $b^2 = 2 a^2$.

Dieser Ausdruck ist offenbar die Gleichung für die Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel am Scheitel das Doppelte des Basiswinkels ist. Die Basis ist b und a bezeichnet den Schenkel desselben. Ein solches Dreieck ist aber immer ein rechtwinkliges, daher schon hieraus die Richtigkeit jener Gleichung folgt.

7) Es sei im Dreiecke A B C (Fig. 154.) der W. B ein spitziger, so findet, wenn A E senkrecht auf B C gezogen, ferner das Segment B E $= h$, $AB = a$, $AC = b$ und $BC = g$ gesetzt wird, bekanntlich die Gleichung

$$b^2 = a^2 + g^2 - 2 g \cdot h$$

statt. Um den durch diese Gleichung ausgedrückten Lehrsatz als eine Folge des allgemeinen Gesetzes darzustellen, wollen wir das Stück $DE = BE = h$ abschneiden und den Punkt A mit D verbinden, so folgt

$AD = s = a$, $BD = c = 2h$, und $DC = d = g - 2h$.

Werden diese Werthe in die allgemeine Gleichung

$$(a^2 - c^2 - s^2) d + (b^2 - d^2 - s^2) c = o$$

substituirt, so ergibt sich

$$(a^2 - 4h^2 - a^2)(g - 2h) + [b^2 - (g - 2h)^2 - a^2] 2h = o \text{ oder}$$

$$- 2h (g - 2h) + b^2 - (g - 2h)^2 - a^2 = o.$$

Nach gehöriger Entwicklung und Reduktion findet man die oben aufgestellte Gleichung

$$b^2 = a^2 + g^2 - 2g \cdot h.$$

Auf ähnliche Weise verfährt man, wenn die Senkrechte A E außerhalb des Dreiecks zu liegen kömmt.

Ist im Dreiecke A D C (Fig. 154.) der Winkel A D C ein stumpfer und A E auf die Verlängerung von D C senkrecht gezogen, so hat man, wenn $AC = b$, $DC = d$, $AD = s$ und $DE = h$ gesetzt wird, wie bekannt, folgende Gleichung

$$b^2 = d^2 + s^2 + 2d \cdot h.$$

Um zu beweisen, daß auch dieses Theorem ein spezieller Fall des allgemeinen Lehrsatzes sei, mache man die Verlängerung von D E, nämlich $BE = DE = h$ und verbinde den Punkt B mit A, so folgt

$$AB = a = s \text{ und } BD = c = 2h.$$

Werden nun die Werthe von a und c in die Gleichung

$$(a^2 - c^2 - s^2) d + (b^2 - d^2 - s^2) c = o$$

substituirt, so ergibt sich

$$(s^2 - 4h^2 - s^2) d + (b^2 - d^2 - s^2) 2h = o \text{ oder}$$

$$- 2h\, d + b^2 - d^2 - s^2 = o, \text{ daher}$$

$$b^2 = d^2 + s^2 + 2d \cdot h.$$

8) Wird im Dreiecke A B C (Fig. 154) durch die Gerade $AD = s$ der Winkel B A C halbirt, so zerfällt bekanntlich die Seite $BC = g$ in zwei Segmente B D und D C, die den anliegenden Seiten $AB = a$ und $AC = b$ proportionirt sind. Offenbar muß also

$$BD = \frac{ag}{+ ba} \text{ und } CD = \frac{bg}{a + b} \text{ sein; denn es ist}$$

$$BD + DC = BC = \frac{ag}{a+b} + \frac{bg}{a+b} = g, \text{ und es verhält sich}$$

$$BD : CD = \frac{ag}{a+b} : \frac{bg}{a+b} = a : b.$$

Wird nun der neue Lehrsatz angewendet, so folgt:

$$\left[a^2 - \frac{a^2 g^2}{(a+b)^2} - s^2\right] \frac{bg}{a+b} + \left[b^2 - \frac{b^2 g^2}{(a+b)^2} - s^2\right] \frac{ag}{a+b} = o,$$

oder

$$\left[a^2 - \frac{a^2 g^2}{(a+b)^2} - s^2\right] b + \left[b^2 - \frac{b^2 g^2}{(a+b)^2} - s^2\right] a = o;$$

diese Gleichung läßt sich auch auf folgende Art darstellen:

$$ab\,(a+b) - s^2\,(a+b) - \frac{abg^2\,(a+b)}{(a+b)^2} = o, \text{ daher folgt}$$

$$ab\,(a+b) - s^2\,(a+b) - \frac{abg^2}{a+b} = o, \text{ oder}$$

$$s^2\,(a+b) = ab\,(a+b) - \frac{abg^2}{a+b}, \text{ somit}$$

$$s^2\,(a+b)^2 = ab\,(a+b)^2 - abg^2; \text{ ferner findet man}$$

$$s^2\,(a+b)^2 = ab\,[(a+b)^2 - g^2]$$

und hieraus folgt endlich

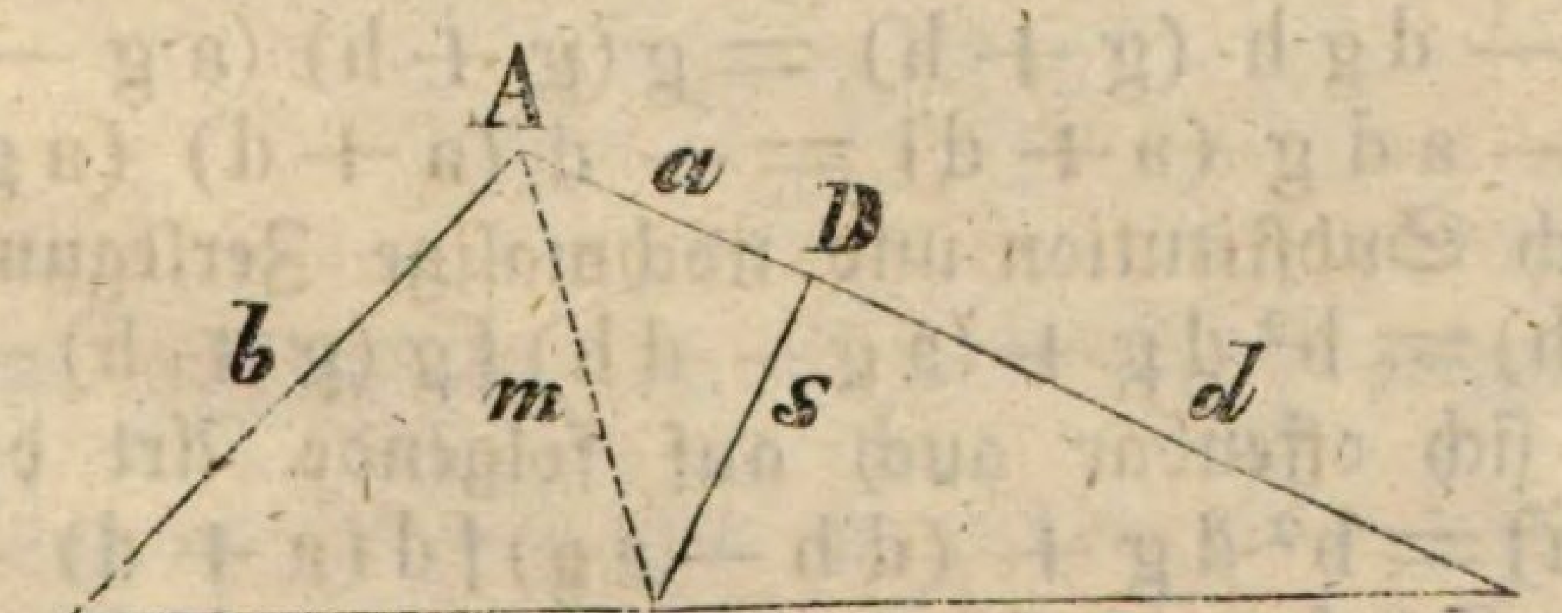
$$s^2\,(a+b)^2 = ab\,(a+b+g)\,(a+b-g).$$

Diese Gleichung drückt die Relation aus, an welche die Dreieckseiten a, b und g, und jene Gerade s, die den von beiden ersteren gebildeten Winkel halbirt, gebunden sind.

Anwendung des entwickelten Theorems.

1) Ist im Dreiecke ABC (Fig. 156.) von einer Seite AC zu einer andern BC eine Gerade DE beliebig gezogen, so findet für die Größe

Fig. 156.



$AD = a$, $Ab = b$, $BE = h$, $EC = g$, $DC = d$ und $DE = s$ folgende Gleichung statt:

$$s^2 (a + d)(h + g) = b^2 d g + (d h - a g)\Big[d(a + b) - g(h + g)\Big]$$

Um die Richtigkeit derselben zu beweisen, wollen wir noch den Punkt A mit E durch die Gerade $AE = m$ verbinden, und nun den neuen Lehrsatz auf das Dreieck ABC anwenden; so folgt

$$(b^2 - h^2 - m^2) g + [(a + d)^2 - g^2 - m^2] h = o.$$

Wird aus dieser Gleichung der Werth von m^2 bestimmt, so ergibt sich

$$m^2 = \frac{(b^2 - h^2) g + [(a + d)^2 - g^2] h}{g + h}.$$

Auf gleiche Weise läßt sich auch der genannte Satz auf das Dreieck AEC anwenden, daher erhält man

$$(m^2 - a^2 - s^2) d + (g^2 - d^2 - s^2) a = o,$$

und wenn hieraus der Werth vom m^2 abgeleitet wird.

$$m^2 = \frac{a(d^2 + s^2 - g^2) + (a^2 + s^2) d}{d}$$

Werden die für m^2 erhaltenen beiden Ausdrücke einander gleich gesetzt, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$d g (b^2 - h^2) + d h [(a + d)^2 - g^2] =$$
$$= a (g + h)(d^2 + s^2 - g^2) + d (g + h)(a^2 + s^2),$$

oder durch Entwicklung der angezeigten Operationen:

$$b^2 d g - d g h^2 + 2a d^2 h + d^3 h - d h g^2 =$$
$$= a d^2 g + a d^2 h + a s^2 (g + h) - a g^2 (g + h) + a^2 d g + d s^2 (g + h).$$

Nun ist aber

$$a s^2 (g + h) + d s^2 (g + h) = s^2 (a + d)(g + h),$$

also läßt sich obige Gleichung auf folgende Art darstellen:

$$b^2 d g - d g h^2 - d g^2 h + a d^2 h + d^3 h - a^2 d g - a d^2 g +$$
$$+ a g^2 (g + h) = s^2 (a + d)(g + h),$$

oder durch Zerlegung in Faktoren:

$$b^2 d g - d g h (g + h) + d^2 h (a + d) - a d g (a + d) +$$
$$+ a g^2 (g + h) = s^2 (a + d)(g + h);$$

ferner findet man

$$a g^2 (g + h) - d g h (g + h) = g (g + h)(a g - d h) \text{ und}$$
$$d^2 h (a + d) - a d g (a + d) = - d (a + d)(a g - d h);$$

also ergibt sich durch Substitution und nochmalige Zerlegung

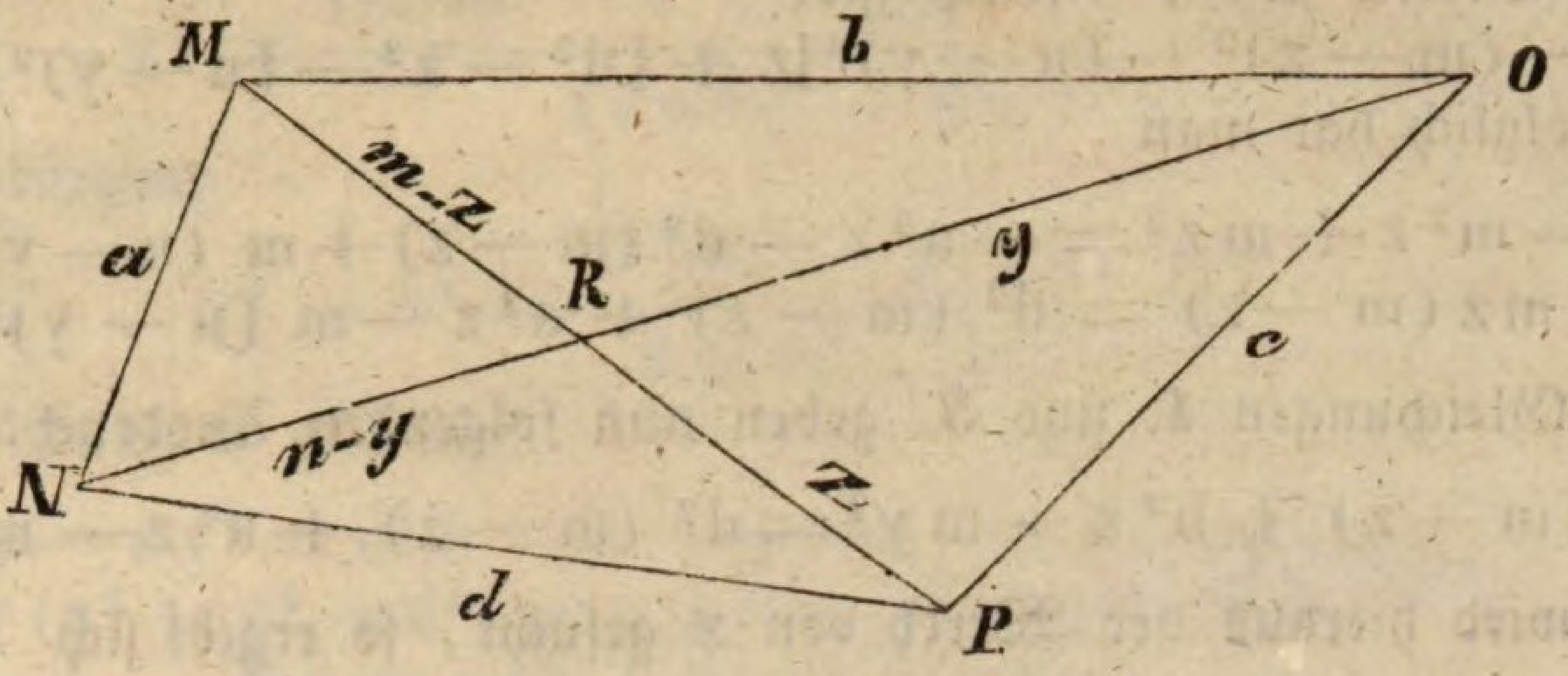
$$s^2 (a + d)(g + h) = b^2 d g + (a g - d h)[g (g + h) - d (a + d)];$$

welche Gleichung sich offenbar auch auf folgende Art darstellen läßt:

$$s^2 (a + d)(g + h) = b^2 d g + (d h - a g)[d (a + d) - g (g + h].$$

2) Der neue Lehrsatz in seiner Anwendung auf das Viereck gewährt uns ein Mittel, das Gesetz der gegenseitigen Abhängigkeit der Seiten und Diagonalen auf eine allgemeine Weise darzustellen.

Fig. 157.



In dem zu betrachtenden Vierecke MNPO sei

$$MN = a,\ MO = b,\ PO = c \text{ und } NP = d, \text{ ferner}$$
$$NO = n,\ MP = m,\ RO = y \text{ und } PR = z, \text{ so folgt}$$
$$NR = NO - RO = n - y \text{ und}$$
$$MR = MP - PR = m - z.$$

Aus dem Dreiecke MNO ergibt sich nun
$$[a^2 - (n - y)^2 - (m - z)^2]\, y + [b^2 - y^2 - (m - z)^2]\,(n - y) = 0,$$
und hieraus

$$a^2 y - n^2 y + n y^2 - n\,(m - z)^2 + b^2 (n - y) = 0, \text{ daher auch}$$
$$n y (n - y) = b^2 (n - y) + a^2 y - n\,(m - z)^2 \ldots\ldots (1.)$$

Das Dreieck NPO gibt ferner
$$[d^2 - (n - y)^2 - z^2]\, y + (c^2 - y^2 - z^2)\,(n - y) = 0,$$
also ist auch

$$- n^2 y + n y^2 = - c^2 (n - y) + n z^2 - d^2 y, \text{ demnach}$$
$$n y\,(n - y) = c^2\,(n - y) + d^2\, y - n z^2 \ldots\ldots\ldots (2.)$$

Die Gleichungen 1. und 2. geben nun folgenden Ausdruck:
$$b^2 (n - y) + a^2 y - n\,(m - z)^2 = c^2\,(n - y) + d^2 y - n z^2,$$
und wird hieraus der Werth von z bestimmt, so hat man

$$z = \frac{n\,(m^2 + c^2 - b^2) + y\,(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)}{2 m n}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$m^2 + c^2 - b^2 = A \text{ und } b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = B,$$

so nimmt diese Gleichung folgende einfachere Form an:

$$z = \frac{A n + B y}{2 m n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.)$$

Wird der neue Lehrsatz auf das Dreieck MOP angewendet, so ergibt sich

$$[b^2 - (m - z)^2 - y^2]\, z + (c^2 - z^2 - y^2)\,(m - z) = 0,$$
oder auch

$$- m^2 z + m z^2 = - c^2\,(m - z) - b^2 z + m y^2, \text{ somit}$$
$$m z\,(m - z) = c^2\,(m - z) + b^2 z - m y^2 \ldots\ldots\ldots (4.)$$

Das Dreieck M N P endlich gibt
$[a^2 - (m - z)^2 - (n - y)^2]z + [d^2 - z^2 - (n - y)^2](m - z) = o$, folglich hat man

$- m^2 z + m z^2 = - a^2 z - d^2 (m - z) + m (n - y)^2$, daher auch $m z (m - z) = d^2 (m - z) + a^2 z - m (n - y)^2$ .... (5.)

Die Gleichungen 4. und 5. geben nun folgenden Ausdruck:

$$c^2 (m - z) + b^2 z - m y^2 = d^2 (m - z) + a^2 z - m (n - y)^2,$$

und wird hieraus der Werth von z gesucht, so ergibt sich

$$z = \frac{2 m n y - m (n^2 + c^2 - d^2)}{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}$$

Nun sei $n^2 + c^2 - d^2 = D$, so hat man

$$z = \frac{2 m n y - D m}{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.)$$

Da die Gleichungen 3. und 6. den Werth von z darstellen, so folgt hieraus die neue Gleichung

$$\frac{A n + B y}{2 m n} = \frac{2 m n y - D m}{B},$$

aus welcher y bestimmt werden kann, es ist nämlich

$$y = \frac{n (A B + 2 m^2 D)}{4 m^2 n^2 - B^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.)$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 3. substituirt, so findet man z, und zwar nach gehöriger Reduktion,

$$z = \frac{m (B D + 2 A n^2)}{4 m^2 n^2 - B^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8.)$$

Wir beabsichtigen die gefundenen Werthe von y und z in die Gleichung 2. zu substituiren, daher wollen wir vorläufig die Differenz $y^2 - z^2$ abgesondert bilden.

Erhebt man die Gleichung 7. auf die zweite Potenz, so folgt

$$y^2 = \frac{n^2 (A^2 B^2 + 4 A B D m^2 + 4 D^2 m^4)}{(4 m^2 n^2 - B^2)^2},$$

und durch Quadrirung der Gleichung 8. findet man

$$z^2 = \frac{m^2 (B^2 D^2 + 4 A B D n^2 + 4 A^2 n^4)}{(4 m^2 n^2 - B^2)^2}, \text{ somit}$$

$$y^2 - z^2 = \frac{A^2 B^2 n^2 + 4 D^2 m^4 n^2 - B^2 D^2 m^2 - 4 A^2 m^2 n^4}{(4 m^2 n^2 - B^2)^2},$$

und wenn man den Zähler in Faktoren zerlegt,

$$y^2 - z^2 = \frac{(D^2 m^2 - A^2 n^2)(4 m^2 n^2 - B^2)}{(4 m^2 n^2 - B^2)^2},$$

also durch Abkürzung

$$y^2 - z^2 = \frac{D^2 m^2 - A^2 n^2}{4 m^2 n^2 - B^2}$$

Die Gleichung 2. gibt nun

$$n^2 y - n y^2 = c^2 n - c^2 y + d^2 y - n z^2, \text{ oder auch}$$
$$y(n^2 + c^2 - d^2) = n(c^2 + y^2 - z^2), \text{ somit}$$
$$D y = n c^2 + n(y^2 - z^2).$$

Werden die früher gefundenen Werthe von y und $y^2 - z^2$ in diese Gleichung eingeführt, so erhält man

$$\frac{D(AB + 2 D m^2)}{4 m^2 n^2 - B^2} = c^2 + \frac{D^2 m^2 - A^2 n^2}{4 m^2 n^2 - B^2},$$

und durch Wegschaffung der Brüche nach gehöriger Reduktion,

$$A B D + A^2 n^2 + B^2 c^2 + D^2 m^2 - 4 m^2 n^2 c^2 = o \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9.)$$

Allein es ist $A D = (m^2 + c^2 - b^2)(n^2 + c^2 - d^2)$

$$= m^2 n^2 + m^2 (c^2 - d^2) + n^2 (c^2 - b^2) + (c^2 - b^2)(c^2 - d^2),$$

ferner $A^2 = (m^2 + c^2 - b^2)^2$

$$= m^4 + 2 m^2 (c^2 - b^2) + (c^2 - b^2)^2, \text{ und endlich}$$

$$D^2 = (n^2 + c^2 - d^2)^2$$

$$= n^4 + 2 n^2 (c^2 - d^2) + (c^2 - d^2)^2,$$

also ergibt sich durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung 9.

$$m^2 n^2 [B + n^2 + 2(c^2 - d^2) + m^2 + 2(c^2 - b^2) - 4 c^2] +$$
$$+ m^2 [B(c^2 - d^2) + (c^2 - d^2)^2] + n^2 [B(c^2 - b^2) + (c^2 - b^2)^2] +$$
$$+ B(c^2 - d^2)(c^2 - b^2) + B^2 c^2 = o \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10.)$$

Der Faktor von $m^2 n^2$ gestaltet sich durch Reduktion auf folgende Weise

$$B + m^2 + n^2 - 2 b^2 - 2 d^2,$$

und wenn statt B der entsprechende Werth substituirt wird,

$$m^2 + n^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2; \text{ ferner ist}$$

$$B(c^2 - b^2) + (c^2 - b^2)^2 = (c^2 - b^2)(B + c^2 - b^2)$$
$$= (c^2 - b^2)(d^2 - a^2)$$
$$= (a^2 - d^2)(b^2 - c^2), \text{ und}$$

auf ähnliche Art zeigt sich auch

$$B(c^2 - d^2) + (c^2 - d^2)^2 = (a^2 - b^2)(d^2 - c^2).$$

Endlich findet man

$$B(c^2 - d^2)(c^2 - b^2) + B^2 c^2 = B[(c^2 - d^2)(c^2 - b^2) + B c^2]$$
$$= B(b^2 d^2 - a^2 c^2)$$
$$= (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(a^2 c^2 - b^2 d^2)$$

Die erhaltenen Ausdrücke in die Gleichung **10.** substituirt, geben die gesuchte Endgleichung:

$$m^2 n^2 (m^2 + n^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + m^2 (a^2 - b^2)(d^2 - c^2) +$$
$$+ n^2 (a^2 - d^2)(b^2 - c^2) + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(a^2 c^2 - b^2 d^2) = o,$$

welche zur Entwicklung verschiedener spezieller Fälle Gelegenheit darbietet.

Druck von Karl Ueberreuter.

Förster Buchh.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hartmann, Mathias

Grundlehren der Geometrie

Wien 1855

Math.p. 203 b
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081929-0